Н. Г. Миндюк
И. С. Шлыкова

Методические рекомендации

АЛГЕБРА

КЛАСС
8

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Н. Г. Миндюк
И. С. Шлыкова

АЛГЕБРА

Методические рекомендации

8 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

Москва
«Просвещение»
2016

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
М61

16 +

Миндюк Н. Г.
М61 Алгебра. Методические рекомендации. 8 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Н. Г. Миндюк, И. С. Шлыкова. — М. : Просвещение, 2016. — 192 с. : ил. — ISBN 978-5-09-042065-5.

Эта книга предназначена для учителей, ведущих преподавание по учебнику «Алгебра, 8» авторов Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой под редакцией С. А. Теляковского. В ней дана характеристика курса алгебры 8 класса, приведены методические рекомендации по всем темам и указания к упражнениям учебника и рабочей тетради. В пособии содержится примерное планирование учебного материала, а также тексты контрольных работ и тест для итогового зачёта.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

Учебное издание

Миндюк Нора Григорьевна, **Шлыкова** Инга Соломоновна

АЛГЕБРА

Методические рекомендации

8 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *Т. Г. Войлокова*. Младший редактор *Е. А. Андреенкова*. Художник *О. П. Богомолова*. Художественный редактор *О. П. Богомолова*. Компьютерная графика *И. В. Губиной*. Техническое редактирование и компьютерная вёрстка *Т. М. Якутович*. Корректор *Н. А. Юсупова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 10.02.16. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура NewtonCSanPin. Печать офсетная. Уч.- изд. л.10.00. Тираж 2000 экз. Заказ №

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано по заказу ОАО «ПолиграфТрейд» в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы» ОАО «Издательство «Высшая школа». 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, д. 46.
Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51.

ISBN 978-5-09-042065-5

Предисловие

Содержание и методические особенности учебника алгебры для 8 класса под редакцией С. А. Теляковского

Данное методическое пособие предназначено для учителей, ведущих преподавание по учебнику «Алгебра, 8» Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой под редакцией С. А. Теляковского. Представленный в этом учебнике курс отвечает требованиям Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования и ориентирован на реализацию целей интеллектуального и общекультурного развития учащихся.

В учебник «Алгебра, 8» включён материал из следующих фундаментальных разделов: арифметика, алгебра, функции, статистика. Содержание материала каждого из этих разделов раскрывается последовательно, составляя соответствующую содержательно-методическую линию. В учебнике реализуется принцип сбалансированного развития содержательно-методических линий, их взаимосвязи и взаимодействия. Преобразования выражений используются при решении новых задач вычислительного характера, для расширения круга рассматриваемых уравнений, а также для исследования функций. Решение уравнений и неравенств связано с вычислениями и тождественными преобразованиями, а также с различными задачами функционального характера. При изучении элементов статистики находят применение вычислительные умения, а также графические умения, сформированные при изучении материала о функциях. Благодаря этому создаются условия для усвоения учащимися теории и овладения математическим аппаратом.

В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования представленный в учебнике материал ориентирован на достижение учащимися трёх групп образовательных результатов обучения: личностных, метапредметных и предметных.

Реализованный в учебнике подход к построению курса способствует личностному развитию учащихся, создаёт условия для определения каждым из них индивидуальной траектории изучения курса.

Система упражнений в каждом пункте начинается с простейших заданий, очерчивающих тот минимум умений, без которого невозможно дальнейшее изучение курса. Разобранные в учебнике авторские примеры, пошаговое нарастание трудности заданий, сквозная линия упражнений для повторения, наличие раздела «Сведения из курса алгебры 7 класса» — всё это создаёт предпосылки для усвоения курса слабыми учениками. В то же время в поле зрения авторов постоянно находятся учащиеся, проявляющие интерес и склонности к математике. Усложнённые и нестандартные задания, включённые в число основных и дополнительных упражнений к главам, в пункты под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше», в раздел «Задачи повышенной трудности», стимулируют учащихся, интересующихся математикой, к мобилизации своих сил для перехода на более высокую ступень в овладении материалом.

Личностному развитию учащихся способствуют также включённый в учебник раздел «Исторические сведения» и приведённые в некоторых пунктах сведения из жизни великих математиков. Ознакомление с материалом исторического характера способствует формированию общекультурной компетентности учащихся.

Принятый в учебнике подход к изложению теоретического материала и построению системы упражнений создаёт условия для достижения метапредметных результатов обучения. Включённые в учебник предисловие и преамбулы к главам раскрывают практическую значимость формируемых знаний и умений. В ходе изучения материала продолжается формирование умений применять модели и схемы, знаки и символы. Приводится широкий круг упражнений, в которых приходится переходить от описания реальной ситуации к уравнению, от формулы, задающей функцию, к соответствующему графику и т. п.

В учебнике имеется немало заданий с проблемной постановкой вопросов, например, какой записью выражения удобнее пользоваться для вычисления его значения на калькуляторе, существует ли такое значение параметра, при котором данное квадратное уравнение с параметром не имеет корней, имеет один корень, имеет два корня. В ходе выполнения подобных упражнений восьмиклассники учатся аргументировать свой ответ, вести доказательные рассуждения. Включение в учебник заданий для работы в парах и задач-исследований способствует формированию коммуникативной компетентности учащихся. Задания для работы в парах ориентированы на совместное составление плана решения и взаимную проверку полученных результатов. Задачи-исследования направлены на совместную работу учащихся под руководством учителя. В ходе их выполнения формируется умение учащихся вести поиск путей решения в контакте с одноклассниками, делать выводы и обобщения.

Содержание материала, представленного в учебнике «Алгебра, 8», и принятый подход к его изложению создают предпосылки для достижения учащимися предметных результатов обучения. В процессе изучения курса расширяются представления учащихся о числах, вводятся понятия «иррациональное число», «действительное число». Учащиеся знакомятся с преобразованиями рациональных дробей, а также выражений, содержащих квадратные корни, делают новые шаги в овладении системой функциональных понятий, знакомятся со свойствами и графиками функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = \sqrt{x}$. Формируются умения учащихся решать квадратные и дробные рациональные уравнения. Расширяется круг текстовых задач, решаемых с помощью уравнений. В их число включаются задачи с практическим содержанием, в частности задачи на смеси и сплавы. Учащиеся овладевают способами решения линейных неравенств с одной переменной и их систем, получают представление о свойствах степени с целым показателем и об использовании этих свойств в преобразованиях. Они знакомятся с особенностями организации статистических исследований, приобретают начальный опыт в использовании различных способов наглядного представления данных.

Система построения курса, представленная в учебнике «Алгебра, 8», создаёт благоприятные условия для его усвоения учащимися и их дальнейших шагов в овладении математическими знаниями и умениями.

К данному курсу существует **Электронная форма учебника (ЭФУ)** — соответствующая по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника и включающая в себя интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие материал печатного учебника.

Функциональными особенностями ЭФУ является:

— удобный и понятный интерфейс и навигация по ЭФУ;

— работа в онлайн- и офлайн-режимах;

— тестовые задания к каждой теме, разделу учебника;

— возможность добавления материалов, созданных учителем;

— инструменты изменения размера шрифта, создания заметок и закладок.

Использование ЭФУ предоставляет учителю следующие возможности:

— организовать контроль и самоконтроль по результатам изучения темы;

— реализовать технологии мобильного, дистанционного или смешанного обучения;

— реализовать требования ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.

Учебные пособия, дополняющие учебник «Алгебра, 8» под редакцией С. А. Теляковского

1. Миндюк Н. Г. Алгебра. Рабочая тетрадь. 8 класс. В 2 ч. / Н. Г. Миндюк, И. С. Шлыкова. — М.: Просвещение, 2011—2015.

В рабочую тетрадь входит 37 работ, составленных по всем пунктам учебника, за исключением дополнительных пунктов под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше». Каждая работа состоит из двух разделов. В разделе I содержатся несложные задания, способствующие усвоению вводимых понятий и алгоритмов, формированию фундаментальных умений, установлению связей нового материала с ранее изученным. В раздел II включены более сложные задания, выполнение которых требует свободного владения сформированными знаниями и умениями, проявления интеллектуальной гибкости.

Упражнения, представленные в рабочей тетради, разнообразны по форме предъявления. Учащимся предлагается закончить начатое решение, проиллюстрировать с помощью стрелок некоторое соответствие, выбрать верный ответ. Наличие подготовленных таблиц, вычерченных систем координат, некоторых пояснений к составлению уравнений или систем уравнений и т. п. создаёт предпосылки для интенсификации учебного процесса.

Рабочая тетрадь предоставляет широкие возможности для организации работы учащихся в классе и дома.

2. Жохов В. И. Алгебра. Дидактические материалы. 8 класс / В. И. Жохов, Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. — М.: Просвещение, 2014—2015.

Дидактические материалы предназначены для организации самостоятельной работы учащихся и контроля за их знаниями и умениями. Включённые в них работы делятся на два вида: самостоятельные и контрольные. Каждая самостоятельная работа содержит два блока заданий. Первый блок состоит из тренировочных заданий, направленных на достижение учащимися уровня обязательной подготовки. Второй блок состоит из усложнённых заданий, выполнение которых требует продвинутых технических навыков, умения свободно оперировать приобретёнными знаниями, проявлять определённую сообразительность.

Контрольные работы даны в четырёх вариантах. Каждая из них включает задания обязательного уровня, отмеченные особым знаком, и задания более высокого уровня сложности. Кроме того, в дидактические материалы включены задания олимпиадного уровня, позволяющие учителю организовать подготовку учащихся к школьным олимпиадам.

3. Жохов В. И. Уроки алгебры в 8 классе: пособие для учителей общеобразовательных организаций / В. И. Жохов, Л. Б. Крайнева. — М.: Просвещение, 2014—2015.

Книга имеет целью помочь учителю в подготовке уроков. В ней даются рекомендации по организации уроков, для каждого из которых предложены соответствующие устные упражнения, проведён отбор теоретических сведений, тренировочных упражнений и упражнений для повторения для работы в классе, выдвинуты предложения по подведению итога урока и отбору упражнений для задания на дом.

В пособии предложены два варианта примерного тематического планирования, рассчитанного на разное число недельных часов, выделяемых на изучение алгебры. Приводятся тексты контрольных работ в двух вариантах.

Содержание и структура пособия «Алгебра. Методические рекомендации. 8 класс»

В данном методическом пособии приводятся рекомендации для учителей, представленные в виде отдельных глав, которые делятся на параграфы. Названия глав и параграфов дублируют соответствующие названия в учебнике. Указано число часов, отводимых на изучение входящих в него пунктов (для второго варианта примерного планирования учебного материала это число записано в скобках). Обозначено место соответствующих контрольных работ.

В параграфах выделяются следующие рубрики: «Содержание материала», «Основная цель», «Характеристика основных видов деятельности учащихся», «Методический комментарий». Этот материал позволяет учителю правильно расставить акценты при организации учебного процесса. В пособие включены рубрики «Указания к основным упражнениям учебника», а также «Указания к дополнительным упражнениям учебника» и «Указания к упражнениям из рабочей тетради». Этот материал может оказаться полезным для учителя при подготовке к урокам. Подробно разбираются приёмы выполнения упражнений из дополнительных пунктов под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше».

В пособие включены тексты текущих контрольных работ и итоговой контрольной работы, а также тест для итогового зачёта, охватывающий все темы курса.

Завершает пособие «Примерное планирование учебного материала», в котором указано время, отводимое на изучение каждого параграфа, и место контрольных работ по курсу алгебры 8 класса.

Рациональные дроби

§ 1. Рациональные дроби и их свойства

Номер пункта	Название пункта	Число уроков[1]
1	Рациональные выражения	2 (2)
2	Основное свойство дроби. Сокращение дробей	3 (3)

Содержание материала

В курсе алгебры 7 класса было введено понятие целого выражения и рассматривались различные тождественные преобразования целых выражений. В главе I продолжается ознакомление учащихся с тождественными преобразованиями алгебраических выражений. В данном параграфе вводятся понятия рационального выражения, допустимых значений переменных в рациональном выражении, рациональной дроби. Учащиеся знакомятся с основным свойством рациональной дроби и его применением в преобразованиях дробных выражений.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы ввести понятие рациональной дроби, сформировать умения учащихся в несложных ситуациях находить допустимые значения переменной в выражениях, содержащих рациональные дроби с одной переменной, ознакомить их с основным свойством дроби и научить применять его при сокращении дробей и приведении их к новому знаменателю.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны уметь находить допустимые значения переменной в выражениях, содержащих дроби с переменной в знаменателе. Они должны уметь также выполнять сокращение дробей, используя при необходимости разложение

[1] Здесь и далее в скобках указывается число уроков, выделяемых при втором варианте планирования.

многочленов на множители, представлять частное двух целых выражений в виде дроби и сокращать полученную дробь, если это возможно. Формируется также умение учащихся приводить дроби к указанному знаменателю, представлять целое выражение в виде дроби с заданным знаменателем.

Методический комментарий

В курсе алгебры 7 класса учащиеся ознакомились с преобразованиями целых выражений. Тем самым была заложена база для рассмотрения в 8 классе преобразований дробных рациональных выражений.

Изучение первой темы курса алгебры 8 класса «Рациональные дроби и их свойства» начинается с пункта 1 «Рациональные выражения». Здесь вводится ряд новых понятий: дробное выражение, рациональное выражение, допустимые значения переменных в рациональном выражении, рациональная дробь. Усвоению этой системы понятий способствуют упражнения **1—16**. Завершают пункт 1 более сложные задания **17—20**, выполнение которых требует некоторых рассуждений и обоснований. Изучение пункта 2 «Основное свойство дроби. Сокращение дробей» начинается с доказательства основного свойства дроби. Воспроизведение этого доказательства от учащихся не требуется. Важно, чтобы они запомнили формулировку основного свойства рациональной дроби и умели применять это свойство для сокращения рациональных дробей и приведения их к новому знаменателю.

Существенным моментом в теоретической части данного пункта является расширение понятия тождества. В курсе алгебры 7 класса, где рассматривались преобразования целых выражений, тождество определялось как равенство, верное при всех значениях переменных. Теперь, в связи с переходом к изучению преобразований рациональных выражений, понятие тождества уточняется — тождество определяется как равенство, верное при всех допустимых значениях переменных. Такая трактовка понятия тождества находит применение в дальнейшем при рассмотрении преобразований выражений, содержащих корни, степени с целыми отрицательными показателями, а также логарифмических и тригонометрических выражений.

В авторских примерах 1—3 рассматриваются различные случаи применения основного свойства дроби при приведении дробей к новому знаменателю и сокращении дробей. При выполнении соответствующих упражнений широко используются сформированные в курсе алгебры 7 класса умения выполнять преобразования целых выражений. Учащимся, плохо усвоившим соответствующий материал, следует порекомендовать обратиться к включённому в учебник разделу «Сведения из курса алгебры 7 класса», в котором в рубрике «Выражения и их преобразования» в достаточно полном объёме представлены основополагающие понятия и приведены примеры. Для таких учащихся учитель может составить специальные карточки-задания, содержащие простейшие упражнения на преобразования целых выражений.

При изучении пункта 2 рекомендуется специально остановиться на авторском примере 4, в котором учащиеся впервые встречаются со случаем, когда график функции представляет собой некоторую линию с «выколотой» точкой. С подобными примерами они встретятся при выполнении упражнения **36**, предназначенного для работы в парах, а также упражнения **39**. При изучении данного пункта рекомендуется специальное внимание уделить упражнению **45**, где представлена задача-исследование, решение которой связано с нестандартными преобразованиями. Поиск путей решения подобных задач в контакте с одноклассниками и учителем способствует формированию коммуникативной компетентности учащихся.

Из дополнительных упражнений к § 1 можно предложить учащимся при наличии времени выполнить задания **214—216**, в которых находят применение ранее изученные формулы сокращённого умножения.

Указания к основным упражнениям учебника

1. При выполнении этого упражнения учащиеся должны учесть, что главный признак дробного выражения состоит в том, что оно должно содержать действие деления на буквенное выражение.

15. г) Значение дроби равно нулю, если числитель дроби равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Выражение $x(x+3)$ равно 0 при $x=0$ и $x=-3$. При $x=-3$ знаменатель обращается в нуль. Следовательно, данная дробь равна нулю при $x=0$.

16. Аналогичный вопрос полезно задать для выражений $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$ и т. п.

17. г) Для любого значения b справедливы неравенства $(b-3)^2 \geqslant 0$ и $-b^2-1<0$, следовательно, $\frac{(b-3)^2}{-b^2-1} \leqslant 0$.

18. а) Дробь $\frac{4}{a^2+5}$ принимает наибольшее значение, когда её знаменатель принимает наименьшее значение, т. е. при $a=0$.

20. Преобразуем данную дробь:

$$\frac{18}{4x^2+9+y^2+4xy}=\frac{18}{(4x^2+4xy+y^2)+9}=\frac{18}{(2x+y)^2+9}.$$

Наибольшее значение эта дробь принимает при $(2x+y)^2=0$. В этом случае $\frac{18}{(2x+y)^2+9}=\frac{18}{9}=2$. Верный ответ под номером 3.

27. а) $\frac{8^{16}}{16^{12}}=\frac{(2^3)^{16}}{(2^4)^{12}}=\frac{2^{48}}{2^{48}}=1$; б) $\frac{81^{25}}{27^{33}}=\frac{(3^4)^{25}}{(3^3)^{33}}=\frac{3^{100}}{3^{99}}=3$.

При выполнении упражнений **29—31** следует добиваться, чтобы учащиеся начинали сокращение дроби с разложения на множители числителя и знаменателя дроби. Это позволит избежать распространённой ошибки учащихся, допускающих сокращение слагаемых.

32. Для упрощения вычислений следует предварительно сократить дробь.

б) $\frac{9c^2-4d^2}{18c^2d-12cd^2}=\frac{(3c-2d)(3c+2d)}{6cd(3c-2d)}=\frac{3c+2d}{6cd}$.

При $c=\frac{2}{3}$, $d=\frac{1}{2}$ имеем $\frac{3c+2d}{6cd}=\frac{3\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{2}}{6\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=1{,}5$.

36. (*Для работы в парах.*) Общее у дробей, задающих функции в пунктах «а» и «б», состоит в том, что обе эти дроби можно сократить.

а) $\frac{x^2-25}{2x+10}=\frac{(x-5)(x+5)}{2(x+5)}=\frac{x-5}{2}$;

б) $\frac{x^3-9x}{x^2-9}=\frac{x(x^2-9)}{x^2-9}=x$.

Следует обратить внимание на то, что множитель, на который делятся числитель и знаменатель каждой дроби, не должен равняться нулю: а) $x+5\neq 0$; б) $x^2-9\neq 0$. Отсюда допустимые значения переменных: а) $x\neq -5$; б) $x\neq -3$, $x\neq 3$.

Значит, в случае «а» график представляет собой прямую, задаваемую уравнением $y=\frac{x-5}{2}$, с «выколотой» точкой, абсцисса которой равна -5. В случае «б» график представляет собой прямую, задаваемую уравнением $y=x$, с «выколотыми» точками, абсциссы которых равны -3 и 3.

39. Верный график под номером 4, так как из равенства $y=\frac{(x-1)^2}{x-1}$ следует, что $y=x-1$ при $x\neq 1$.

45. (*Задача-исследование.*)

1) Пусть $a = 1$, тогда $\dfrac{a^2 - 4}{12 + a^2 - a^4} = \dfrac{1 - 4}{12 + 1 - 1} = -\dfrac{1}{4} < 0.$

2) Для нахождения ответа на вопрос задачи следует разложить на множители знаменатель дроби и сократить дробь:

$$12 + a^2 - a^4 = 16 - 4 + a^2 - a^4 = (16 - a^4) - (4 - a^2) =$$
$$= (4 - a^2)(4 + a^2) - (4 - a^2) = (4 - a^2)(a^2 + 3);$$

$$\frac{a^2 - 4}{12 + a^2 - a^4} = \frac{a^2 - 4}{(4 - a^2)(a^2 + 3)} = -\frac{1}{a^2 + 3}.$$

При любом значении a имеем $-\dfrac{1}{a^2 + 3} < 0.$ Следовательно, значение исходной дроби отрицательно при любом допустимом значении a, т. е. при $a \neq -2$ и $a \neq 2$.

46. а) $\dfrac{3^{n+2} - 3^n}{3^{n+2} + 3^{n+1} + 3^n} = \dfrac{3^n(3^2 - 1)}{3^n(3^2 + 3 + 1)} = \dfrac{8}{13};$

б) $\dfrac{16^{n+1} - 2^{n+4}}{4 \cdot 2^n(2^{3n} - 1)} = \dfrac{(2^4)^{n+1} - 2^{n+4}}{2^2 \cdot 2^n(2^{3n} - 1)} = \dfrac{2^{n+4}(2^{3n} - 1)}{2^{n+2}(2^{3n} - 1)} = 4.$

Указания к дополнительным упражнениям учебника

208. б) Преобразуем дробь:

$$\frac{37^2 + 111}{40} = \frac{37^2 + 37 \cdot 3}{40} = \frac{37 \cdot (37 + 3)}{40} = 37.$$

209. Имеем уравнение $60t + v(t - 3) = 600.$

Отсюда $v = \dfrac{600 - 60t}{t - 3} = \dfrac{60(10 - t)}{t - 3}.$

Если $t = 7$, то $v = \dfrac{60 \cdot 3}{4} = 45$; если $t = 6$, то $v = \dfrac{60 \cdot 4}{3} = 80.$

213. а) $\overline{a00a} = 1000a + a;$

$\dfrac{\overline{a00a}}{91} = \dfrac{1000a + a}{91} = \dfrac{1001a}{91} = 11a;$

б) $\overline{a0a0} = 1000a + 10a;$

$\dfrac{\overline{a0a0}}{101} = \dfrac{1000a + 10a}{101} = \dfrac{10a(100 + 1)}{101} = 10a.$

216. в) $\dfrac{x(y-z)-y(x-z)}{x(y-z)^2-y(x-z)^2}=$

$$=\frac{xy-xz-xy+yz}{xy^2-2xyz+xz^2-yx^2+2xyz-yz^2}=$$

$$=\frac{yz-xz}{xy^2-x^2y+xz^2-yz^2}=\frac{z(y-x)}{(y-x)(xy-z^2)}=\frac{z}{xy-z^2}.$$

217. Подставив в данную дробь вместо x и y выражения kx и ky $(k\neq 0)$, получим

$$\frac{(kx)^2-2(ky)^2}{3(ky)^2+5(kx)(ky)}=\frac{k^2x^2-2k^2y^2}{3k^2y^2+5k^2xy}=\frac{k^2(x^2-2y^2)}{k^2(3y^2+5xy)}=\frac{x^2-2y^2}{3y^2+5xy}.$$

219. Из соотношений $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ и $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{a}$ выразим c, получим

$c=\dfrac{b^2}{a}$ и $c=\dfrac{a^2}{b}$. Отсюда $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{a^2}{b}$; $a^3=b^3$; $a=b$.

Так как $c=\dfrac{b^2}{a}$, т. е. $c=\dfrac{b^2}{b}$, то $c=b$. Значит, $a=b=c$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 1

11. $\dfrac{15}{x^2+6+9y^2+6xy}=\dfrac{15}{(x+3y)^2+6}$. Дробь принимает наибольшее значение, если $(x+3y)^2=0$. Это значение равно 2,5.

13. б) $\dfrac{2-3c}{3c^3+6c-4-2c^2}=\dfrac{2-3c}{3c(c^2+2)-2(c^2+2)}=\dfrac{2-3c}{(c^2+2)(3c-2)}=$

$=-\dfrac{1}{c^2+2}$. Так как $-\dfrac{1}{c^2+2}<0$ при любом значении c, то значение исходной дроби отрицательно при любом допустимом значении c, т. е. при $c\neq\dfrac{2}{3}$.

14. $t=\dfrac{33}{v+u}+\dfrac{10}{v}+2+\dfrac{10}{v}+\dfrac{33}{v-u}=\dfrac{33}{v+u}+\dfrac{20}{v}+\dfrac{33}{v-u}+2.$

Пункт 2

8. Преобразуем дробь $\dfrac{x^2-9}{2x-6}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)}=\dfrac{x+3}{2}$ при $x\neq 3$.

Значит, графиком данной функции является прямая $y=\dfrac{x+3}{2}$ с «выколотой» точкой, абсцисса которой равна 3.

11. а) $\dfrac{3^{4n+1}+2\cdot 3^{2n+1}}{5\cdot 3^{2n}(3^{2n}+2)}=\dfrac{3^{2n+1}(3^{2n}+2)}{5\cdot 3^{2n}(3^{2n}+2)}=\dfrac{3^{2n+1}}{5\cdot 3^{2n}}=\dfrac{3}{5};$

б) $\dfrac{125\cdot 5^{3n+1}-5^{2n+3}}{25\cdot 5^{3n+1}-5^{2n+2}}=\dfrac{5^3\cdot 5^{3n+1}-5^{2n+3}}{5^2\cdot 5^{3n+1}-5^{2n+2}}=\dfrac{5^{2n+3}(5^{n+1}-1)}{5^{2n+2}(5^{n+1}-1)}=5.$

14. Преобразуем дробь

$$\frac{(2x-6)^2}{4x^2-4x-24}=\frac{(x-3)^2}{x^2-3x+2x-6}=\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+2)}=\frac{x-3}{x+2}.$$

Если $x=-0{,}5$, то $\dfrac{x-3}{x+2}=\dfrac{-0{,}5-3}{-0{,}5+2}=-\dfrac{7}{3}=-2\dfrac{1}{3}.$

§ 2. Сумма и разность дробей

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
3	Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями	2 (3)
4	Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями	4 (5)
	Контрольная работа № 1	1

Содержание материала

В данном параграфе рассматриваются способы сложения и вычитания дробей и применение этих способов в преобразованиях рациональных выражений, составленных из целых и дробных выражений с помощью знаков «плюс» или «минус».

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы сформировать умение учащихся преобразовывать в дробь сумму и разность рациональных дробей, а также упрощать рациональные выражения, составленные из целых и дробных выражений с помощью знаков сложения и вычитания.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

В ходе изучения данного материала учащиеся должны научиться выполнять сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми и разными знаменателями, преобразовывать в дробь рациональное выражение, составленное из целых и дробных выражений с помощью знаков «плюс» и «минус», а также использовать сложение и вычитание дробей с одинаковыми и разными знаменателями для упрощения выражений и доказательства тождеств.

Методический комментарий

Изучение действий с рациональными дробями начинается со сложения и вычитания дробей. Первым шагом здесь является сложение или вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, рассмотренное в пункте 3. Важно подчеркнуть, что правила выполнения этих действий с рациональными дробями полностью повторяют соответствующие правила действий с обыкновенными дробями. Преобразовав по этим правилам сумму или разность двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями, учащиеся должны упростить полученную дробь. Соответствующие преобразования используются в упражнениях **53—60**. Специальное внимание следует уделить упражнению **60**, при выполнении которого необходимо провести дополнительное исследование, проверяя, не обращается ли в нуль при данных значениях переменных знаменатель этих дробей.

К сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями непосредственно примыкает сложение и вычитание дробей с противоположными знаменателями. Подобное преобразование рассмотрено в примере 4 учебного текста и используется в упражнениях **61—64**. Рекомендуется остановиться на упражнениях **66—69**, где учащимся приходится представлять дробь в виде суммы или разности некоторых выражений.

Следующим шагом в ознакомлении с действиями с рациональными дробями является изучение действий сложения и вычитания дробей с разными знаменателями. Основная трудность, с которой сталкиваются здесь учащиеся, состоит в приведении дробей к общему знаменателю. Необходимо подчеркнуть, что в качестве общего знаменателя дробей всегда можно взять произведение их знаменателей. Однако это может привести к громоздким преобразованиям. Поэтому при действиях с дробями с разными знаменателями стараются найти наиболее простой общий знаменатель.

Система упражнений в данном пункте начинается с заданий **73—83**, при выполнении которых применяется преобразование в дробь суммы или разности дробей, знаменателями которых служат одночлены. Эти упражнения достаточно просты и не вызывают затруднений у учащихся. Далее, после рассмотрения примеров 2 и 3 учебного текста, учащиеся приступают к заданиям **84—104**. Здесь им приходится выполнять сложение и вычитание дробей с многочленными знаменателями, применять изученные в курсе алгебры 7 класса приёмы разложения многочленов на множители, формулы сокращённого умножения. Специальное внимание следует уделить упражнению **100**, предназначенному для работы в парах. В этом упражнении сложение и вычитание рациональных дробей используется для исследования значений заданных выражений. Завершают пункт 4 достаточно сложные задания на доказательство тождеств и составление выражений по условию текстовых задач.

Заметим, что при выполнении упражнений на сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями широко используются известные учащимся преобразования целых выражений. Учащимся, допускающим ошибки в таких преобразованиях, полезно порекомендовать обратиться к помещённому в учебнике разделу «Сведения из курса алгебры 7 класса». По усмотрению учителя можно предложить им специально составленные нетрудные задания на преобразование целых выражений.

Из включённых в пункт 4 упражнений для повторения рекомендуется остановиться на задании **106**, связанном с функциональной тематикой. Подобные задания готовят учащихся к предстоящему ознакомлению со свойствами и графиком функции $y = \frac{k}{x}$.

Из дополнительных упражнений к § 2 можно порекомендовать использовать задания **223**, **225**, **234**.

Указания к основным упражнениям учебника

54—56. Важно приучать восьмиклассников внимательно следить за знаками при раскрытии скобок.

57. д) Выполним сложение дробей:

$$\frac{2a+b}{(a-b)^2} + \frac{2b-5a}{(a-b)^2} = \frac{3b-3a}{(a-b)^2} = \frac{3(b-a)}{(a-b)^2}.$$

Полезно обсудить с учащимися возможные варианты преобразования выражения $\frac{3(b-a)}{(a-b)^2}$. Можно воспользоваться тождеством $(a-b)^2 = (b-a)^2$ или тождеством $(b-a) = -(a-b)$:

$$\frac{3(b-a)}{(a-b)^2} = \frac{3(b-a)}{(b-a)^2} = \frac{3}{b-a} \quad \text{или} \quad \frac{3(b-a)}{(a-b)^2} = \frac{-3(a-b)}{(a-b)^2} = -\frac{3}{a-b}.$$

Важно показать, что полученные выражения тождественно равны.

60. Выполним вычитание дробей:

$$\frac{a^2-12b}{a^2-3ab}-\frac{3ab-4a}{a^2-3ab}=\frac{a^2-12b-3ab+4a}{a^2-3ab}=\frac{(a-3b)(a+4)}{a(a-3b)}=\frac{a+4}{a}.$$

Если $a=-0{,}8$, то $\frac{a+4}{a}=\frac{-0{,}8+4}{-0{,}8}=-4$. Лишних данных в условии задачи нет, так как необходимо убедиться, что знаменатель дроби (a^2-3ab) не обращается в нуль при заданных значениях a и b. Действительно, если $a=-0{,}8$, $b=-1{,}75$, то $a^2-3ab=0{,}64-2{,}4\cdot1{,}75\neq0$.

64. а) Важно подчеркнуть, что выражения $(x-5)^2$ и $(5-x)^2$ тождественно равны.

$$\frac{x^2}{(x-5)^2}-\frac{25}{(5-x)^2}=\frac{x^2}{(x-5)^2}-\frac{25}{(x-5)^2}=\frac{x^2-25}{(x-5)^2}=\frac{x+5}{x-5}.$$

68. $\frac{5n^2+3n+6}{n}=\frac{n(5n+3)+6}{n}=5n+3+\frac{6}{n}$.

Данная дробь при натуральном n принимает натуральные значения, если n является делителем числа 6, т. е. одним из чисел 1, 2, 3, 6.

69. $\frac{(m-1)(m+1)-10}{m}=\frac{m^2-1-10}{m}=m-\frac{11}{m}$.

При целом значении m данная дробь принимает целые значения, если m является делителем числа 11, т. е. одним из чисел -11, -1, 1, 11.

76. д) $\frac{2a-3b}{a^2b}+\frac{4a-5b}{ab^2}=\frac{2ab-3b^2+4a^2-5ab}{a^2b^2}=\frac{4a^2-3ab-3b^2}{a^2b^2}$;

е) $\frac{x-2y}{xy^2}-\frac{2y-x}{x^2y}=\frac{x^2-2xy-2y^2+xy}{x^2y^2}=\frac{x^2-xy-2y^2}{x^2y^2}$.

80. е) Возможны два способа решения.

I способ. Представив целое слагаемое $2p$ в виде дроби $\frac{2p}{1}$, получим

$$2p-\frac{4p^2+1}{2p}=\frac{2p}{1}-\frac{4p^2+1}{2p}=\frac{4p^2-4p^2-1}{2p}=-\frac{1}{2p}.$$

II способ. Воспользовавшись тождеством $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, получим

$$2p-\frac{4p^2+1}{2p}=2p-\left(2p+\frac{1}{2p}\right)=-\frac{1}{2p}.$$

90. д) Объединив целые слагаемые в многочлен, получим

$$x-\frac{9}{x-3}-3=(x-3)-\frac{9}{x-3}=\frac{(x-3)^2-9}{x-3}=$$

$$=\frac{(x-3+3)(x-3-3)}{x-3}=\frac{x(x-6)}{x-3}=\frac{x^2-6x}{x-3}.$$

94. При выполнении заданий «в» и «г» полезно предварительно упростить каждую дробь.

в) $\frac{(a+b)^2}{a^2+ab}+\frac{(a-b)^2}{a^2-ab}=\frac{(a+b)^2}{a(a+b)}+\frac{(a-b)^2}{a(a-b)}=\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{a}=$

$=1+\frac{b}{a}+1-\frac{b}{a}=2;$

г) $\frac{x^2-4}{5x-10}-\frac{x^2+4x+4}{5x+10}=\frac{(x-2)(x+2)}{5(x-2)}-\frac{(x+2)^2}{5(x+2)}=$

$=\frac{x+2}{5}-\frac{x+2}{5}=0.$

99. а) Преобразуем каждое из данных выражений:

$$\frac{3}{a^2-3a}+\frac{a^2}{a-3}=\frac{3}{a(a-3)}+\frac{a^2}{a-3}=\frac{3+a^3}{a(a-3)};$$

$$a+3+\frac{9a+3}{a^2-3a}=\frac{(a+3)a(a-3)+9a+3}{a^2-3a}=\frac{a^3-9a+9a+3}{a^2-3a}=\frac{a^3+3}{a(a-3)}.$$

Каждое из выражений тождественно равно одной и той же дроби, следовательно, они тождественно равны.

100. (*Для работы в парах.*) а) Преобразуем данное выражение:

$$\frac{x^3+3x}{x+2}-\frac{3x^2-14x+16}{x^2-4}+2x=$$

$$=\frac{(x^3+3x)(x-2)-(3x^2-14x+16)+2x(x^2-4)}{x^2-4}=$$

$$=\frac{x^4+3x^2-2x^3-6x-3x^2+14x-16+2x^3-8x}{x^2-4}=$$

$$=\frac{x^4-16}{x^2-4}=\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2-4}=x^2+4.$$

Значение выражения x^2+4 положительно при всех значениях x, следовательно, значение исходного выражения является положительным числом при всех допустимых значениях x, т. е. при $x\neq-2$ и $x\neq2$.

б) Преобразуем данное выражение:

$$y+\frac{2y^2+3y+1}{y^2-1}-\frac{y^3+2y}{y-1}=\frac{y(y^2-1)+(2y^2+3y+1)-(y^3+2y)(y+1)}{y^2-1}=$$

$$=\frac{y^3-y+2y^2+3y+1-y^4-2y^2-y^3-2y}{y^2-1}=\frac{-y^4+1}{y^2-1}=-(y^2+1).$$

Значение выражения $-(y^2+1)$ отрицательно при всех значениях y, следовательно, значение исходного выражения является отрицательным числом при всех допустимых значениях y, т. е. при $y\neq-1$ и $y\neq1$.

Уточнение о допустимых значениях переменных сделано для того, чтобы исключить те значения переменных, при которых обращается в нуль знаменатель дроби.

102. Докажем данное тождество:

$$\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}=\frac{x+n+1-x-n}{(x+n)(x+n+1)}=\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}.$$

Используя это тождество, представим каждую из дробей вида $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ как разность дробей $\frac{1}{x+n}$ и $\frac{1}{x+n+1}$:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+$$

$$+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}=\frac{3}{(x+1)(x+4)}.$$

104. $t=\frac{s}{v}+\frac{2s}{v-2}$; $t=\frac{3sv-2s}{v(v-2)}$.

Если $s=10$, $v=6$, то $t=\frac{3\cdot10\cdot6-20}{6\cdot4}=\frac{160}{24}=6\frac{2}{3}$ (ч), т. е. 6 ч 40 мин.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

222. Дробь, дополняющая дробь $\frac{a}{b}$ до 1, имеет вид $1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}$. Так как дробь $\frac{a}{b}$ — правильная, т. е. $a<b$, то $b-a>0$.

Предположим, что дробь $\frac{b-a}{b}$ можно сократить, тогда $b-a=kc$, $b=lc$, где k и l — целые числа. Отсюда $a=b-kc=$ $=lc-kc=(l-k)c$. Получили, что дробь $\frac{a}{b}$ сократима, что противоречит условию.

224. а) Если $\frac{x}{y}=5$, то $\frac{x+y}{y}=\frac{x}{y}+1=6.$

Возможен и другой способ решения.

Если $\frac{x}{y}=5$, то $x=5y$ и $\frac{5y+y}{y}=\frac{6y}{y}=6.$

229. а) Прежде чем выполнять указанные действия, упростим первые две дроби:

$$\frac{2y^2-y}{y^2-y+\frac{1}{4}}=\frac{2y\left(y-\frac{1}{2}\right)}{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2y}{y-\frac{1}{2}};\quad \frac{2y^2+y}{y^2+y+\frac{1}{4}}=\frac{2y\left(y+\frac{1}{2}\right)}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2y}{y+\frac{1}{2}}.$$

Итак, получаем

$$\frac{2y^2-y}{y^2-y+\frac{1}{4}}-\frac{2y^2+y}{y^2+y+\frac{1}{4}}-\frac{1}{y^2-\frac{1}{4}}=\frac{2y}{y-\frac{1}{2}}-\frac{2y}{y+\frac{1}{2}}-\frac{1}{y^2-\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{2y^2+y-2y^2+y-1}{y^2-\frac{1}{4}}=\frac{2y-1}{y^2-\frac{1}{4}}=\frac{4(2y-1)}{4y^2-1}=\frac{4}{2y+1}.$$

230. $\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}=$

$=\frac{c-a+b-c+a-b}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0,$ так как числитель этой дроби равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, поскольку $a\neq b$; $b\neq c$; $c\neq a$ по условию.

233. а) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=$

$=\frac{1}{a(a-b)(a-c)}-\frac{1}{b(a-b)(b-c)}+\frac{1}{c(a-c)(b-c)}=$

$=\frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}.$

Преобразуем числитель этой дроби:

$$bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)=bc(b-c)-a^2c+ac^2+$$
$$+a^2b-ab^2=bc(b-c)+a^2(b-c)-a(b^2-c^2)=$$
$$=(b-c)(bc+a^2-ab-ac)=(b-c)(a(a-b)-c(a-b))=$$
$$=(a-b)(a-c)(b-c).$$

Следовательно, исходное выражение равно $\frac{1}{abc}$, так как $a\neq b\neq c$.

234. в) Представим слагаемое $7a$ в числителе дроби в виде суммы $6a + a$:

$$\frac{a^2 + 7a + 2}{a + 6} = \frac{a^2 + 6a + a + 2}{a + 6} = \frac{a(a + 6) + a + 2}{a + 6} = a + \frac{a + 2}{a + 6}.$$

235. в) Преобразовав разность $\frac{a}{3 - x} - 2$, получим $\frac{a}{3 - x} - 2 = \frac{a - 6 + 2x}{3 - x}$.

Если $\frac{2x}{3 - x} = \frac{a - 6 + 2x}{3 - x}$, то $2x = a - 6 + 2x$; $a = 6$.

236. в) $\frac{2x}{5 - x} = \frac{2x - 10 + 10}{5 - x} = \frac{-2(5 - x) + 10}{5 - x} = -2 + \frac{10}{5 - x}$;

г) $\frac{x - 3}{2 - x} = \frac{x - 2 - 1}{2 - x} = \frac{-(2 - x) - 1}{2 - x} = -1 - \frac{1}{2 - x}$.

237. г) $\frac{7n}{n - 4} = \frac{7n - 28 + 28}{n - 4} = \frac{7(n - 4) + 28}{n - 4} = 7 + \frac{28}{n - 4}$.

Значение данной дроби при целых значениях n является целым числом, если знаменатель дроби $\frac{28}{n - 4}$ является делителем числа 28, т. е. одним из чисел –28, –14, –7, –4, –2, –1, 1, 2, 4, 7, 14, 28. Отсюда значение n является одним из чисел –24, –10, –3, 0, 2, 3, 5, 6, 8, 11, 18, 32.

238. а) $\frac{5x}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 3}$;

$\frac{5x}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{a(x + 3) + b(x - 2)}{(x - 2)(x + 3)}$; $5x = x(a + b) + (3a - 2b)$.

Приравнивая коэффициенты при x и свободные члены, получаем систему уравнений с переменными a и b:

$\begin{cases} a + b = 5, \\ 3a - 2b = 0. \end{cases}$ Отсюда $a = 2,\ b = 3$.

б) $\frac{5x + 31}{(x - 5)(x + 2)} = \frac{a}{x - 5} - \frac{b}{x + 2}$;

$\frac{5x + 31}{(x - 5)(x + 2)} = \frac{a(x + 2) - b(x - 5)}{(x - 5)(x + 2)}$; $5x + 31 = x(a - b) + (2a + 5b)$.

Имеем систему уравнений с переменными a и b:

$\begin{cases} a - b = 5, \\ 2a + 5b = 31. \end{cases}$ Отсюда $a = 8,\ b = 3$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 3

9. $\dfrac{5c-7}{(c-1)^6}+\dfrac{6-c^2}{(c-1)^6}-\dfrac{3c}{(c-1)^6}=\dfrac{5c-7+6-c^2-3c}{(c-1)^6}=\dfrac{-(c-1)^2}{(c-1)^6}=$

$=-\dfrac{1}{(c-1)^4}$. Значение выражения $-\dfrac{1}{(c-1)^4}$ отрицательно при всех значениях c, отличных от 1.

13. $\dfrac{3n(n-1)^2}{n-3}+\dfrac{2(3-4n)}{n-3}-\dfrac{4n+6}{n-3}=\dfrac{3n(n-1)^2+6-8n-4n-6}{n-3}=$

$=\dfrac{3n(n-1)^2-12n}{n-3}=\dfrac{3n(n-1-2)(n-1+2)}{n-3}=3n(n+1).$

Из двух последовательных натуральных чисел n и $n+1$ одно — чётное, следовательно, их произведение кратно 2, а произведение $3n(n+1)$ кратно 6.

14. Выполним указанные действия:

$$\frac{c^2-5cd}{c^2-2cd}-\frac{d(2c+3d)}{c^2-2cd}+\frac{d^2-7cd}{2cd-c^2}=\frac{c^2-5cd-2cd-3d^2-d^2+7cd}{c^2-2cd}=$$

$$=\frac{c^2-4d^2}{c(c-2d)}=\frac{c+2d}{c}=1+2\frac{d}{c}.$$

Если $\dfrac{c}{d}=\dfrac{1}{5}$, то $\dfrac{d}{c}=5$. Имеем $1+2\dfrac{d}{c}=1+2\cdot 5=11$.

Пункт 4

10. Найдём сумму первых двух дробей, затем сложим её с третьей дробью и полученную сумму сложим с последней дробью:

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}+\frac{2a}{a^2+1}+\frac{4a^3}{a^4+1}=\frac{2a}{a^2-1}+\frac{2a}{a^2+1}+\frac{4a^3}{a^4+1}=$$

$$=\frac{4a^3}{a^4-1}+\frac{4a^3}{a^4+1}=\frac{8a^7}{a^8-1}.$$

11. а) $\dfrac{c-1}{c-3}-\dfrac{12}{c^2-9}+\dfrac{c+1}{c+3}=\dfrac{(c-1)(c+3)+(c+1)(c-3)}{c^2-9}-$

$-\dfrac{12}{c^2-9}=\dfrac{2c^2-6-12}{c^2-9}=2.$

Значение этого выражения не зависит от c при всех допустимых значениях c, т. е. при $c\neq -3$ и $c\neq 3$.

12. Преобразуем выражение: $\frac{y^3-4y}{y+3}+\frac{4y^2+15y-81}{y^2-9}+3y=$

$$=\frac{(y^3-4y)(y-3)+4y^2+15y-81+3y(y^2-9)}{y^2-9}=\frac{y^4-81}{y^2-9}=y^2+9.$$

Значение суммы y^2+9 положительно при всех значениях y, следовательно, значение исходного выражения положительно при всех допустимых значениях y, т. е. при $y\neq-3$ и $y\neq3$.

§ 3. Произведение и частное дробей

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
5	Умножение дробей. Возведение дробей в степень	2 (2)
6	Деление дробей	2 (3)
7	Преобразование рациональных выражений	4 (7)
8	Функция $y=\frac{k}{x}$ и её график	2 (3)
	Контрольная работа № 2	1

Содержание материала

В данном параграфе продолжается изучение действий с рациональными дробями. Рассматриваются приёмы умножения и деления дробей, возведения дроби в степень, формируется умение преобразовывать в дробь различные рациональные выражения. Даётся представление о свойствах функции $y=\frac{k}{x}$ и её графике.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы сформировать умение учащихся представлять в виде дроби произведение и частное рациональных дробей, использовать изученные правила действий с рациональными дробями для упрощения некоторых рациональных выражений, а также ознакомить учащихся с функцией $y=\frac{k}{x}$ и её графиком.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

В ходе изучения данного параграфа учащиеся овладевают умением выполнять умножение и деление рациональных дробей, возведение рациональных дробей в степень, а также применять весь комплекс изученных в данной главе преобразований для упрощения и исследования рациональных выражений, доказательства тождеств.

Учащиеся должны уметь строить график функции $y=\frac{k}{x}$ при положительных и отрицательных значениях k, решать графически уравнения вида $\frac{k}{x}=ax+b$, где a и b — некоторые числа, а также уравнения $\frac{k}{x}=x^2$, $\frac{k}{x}=x^3$. Они должны научиться извлекать информацию из графиков обратно пропорциональной зависимости между реальными величинами.

Методический комментарий

В данном параграфе продолжается начатое в предыдущих пунктах ознакомление учащихся с правилами действий с рациональными дробями. Материал пункта 5 «Умножение дробей. Возведение дроби в степень» легко усваивается учащимися, так как правило умножения рациональных дробей аналогично хорошо известному им правилу умножения обыкновенных дробей. После рассмотрения примера 1 учебного текста учащиеся могут приступить к выполнению некоторых из заданий **108—114** на умножение дробей, числители и знаменатели которых являются одночленами. Далее несложно ознакомить их с правилом возведения рациональной дроби в степень, используя для классной и домашней работы упражнения **115—117**. Затем можно перейти к заданиям **119—128**, которые выполняются по тем же правилам. Сложность здесь состоит в том, что компонентами действий служат дроби, числителями или знаменателями которых являются многочлены. При выполнении этих упражнений учащимся приходится активно использовать известные им из курса алгебры 7 класса приёмы преобразования целых выражений, в частности формулы сокращённого умножения. Рекомендуется специальное внимание уделить усложнённым заданиям **118** и **128**, при выполнении которых учащиеся должны найти нестандартный приём решения.

Пункт 6 «Деление дробей» строится по той же схеме, что и пункт 5. Остановиться здесь следует на наиболее сложных для учащихся упражнениях **138** и **143**.

Завершает изучение действий с рациональными дробями пункт 7 «Преобразование рациональных выражений». Здесь учащимся приходится применять весь комплекс умений, сформированных при изучении действий с рациональными дробями. В систему упражнений включены достаточно сложные задания, в которых учащиеся должны определить последовательность преобразований и безошибочно выполнить каждое из них. Важно разъяснить учащимся, что из-за любой ошибки, допущенной на каком-либо промежуточном этапе, последующие преобразования теряют смысл. Рекомендуется уделить внимание заданиям **157** и **158**, в которых ответить на поставленный вопрос учащиеся смогут только после упрощения заданного выражения. Определённую трудность для учащихся представляют задания **164—167**, в которых числители и знаменатели дробей являются дробными выражениями. Следует специально остановиться на задании **169**, предназначенном для работы в парах. При выполнении этого задания учащиеся должны учитывать сложную структуру рассматриваемых выражений. Представленные в пункте 7 задания на преобразование рациональных выражений, безусловно, полезны для формирования алгоритмической культуры учащихся.

В § 3 в связи с рассмотрением действий с рациональными дробями вводится новая статистическая характеристика — среднее гармоническое нескольких величин. С этой целью рассматривается пример 4, в котором составляется формула для вычисления средней скорости пешехода, прошедшего три раза один и тот же путь, причём с разными скоростями v_1 км/ч, v_2 км/ч и v_3 км/ч. Внимание учащихся обращается на то, что средняя скорость движения пешехода на участках пути одинаковой длины не равна среднему арифметическому этих скоростей, а вычисляется как среднее гармоническое по более сложной формуле: $v_{\text{ср}} = \dfrac{3}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2} + \dfrac{1}{v_3}}$. Учащиеся должны запомнить определение среднего гармонического и формулу, по которой оно вычисляется. Понятие среднего гармонического используется при выполнении упражнений **170—173**.

Завершает главу I пункт 8 «Функция $y = \dfrac{k}{x}$ и её график». Функциональная линия была достаточно широко представлена в курсе алгебры 7 класса. Учащиеся ознакомились с некоторыми общими сведениями о функциях, со свойствами и графиками прямой пропорциональности и линейной функции общего вида, функций $y = x^2$, $y = x^3$. В пункте 8 сведения о функциях расширяются. Рассматривается пример обратно пропорциональной зависимости, свойства обратной пропорциональности. Учащиеся знакомятся с графиком обратной пропорциональности. Впервые они сталкиваются с ситуацией, когда график функции не является сплошной линией, а состоит из двух ветвей. Учащиеся должны уметь строить график обратной пропорциональности в несложных ситуациях, использовать это умение для графического решения уравнений в заданиях **186**, **187**, а также в задании **188**, предназначенном для работы в парах. Специальное внимание рекомендуется уделить упражнению **191**, где учащимся предлагается ответить на вопросы, используя график реальной зависимости.

В системе упражнений для повторения, включённых в данный пункт, рекомендуется уделить внимание задаче-исследованию **195**, где в усложнённой ситуации используется сложение дробей.

Указания к основным упражнениям учебника

109. в) При выполнении умножения дроби на одночлен можно порекомендовать учащимся на первых порах записывать одночлен в виде дроби со знаменателем 1, а затем переходить к сокращённой форме записи.

$$\frac{7a^3}{24b} \cdot 8b^2 = \frac{7a^3}{24b} \cdot \frac{8b^2}{1} = \frac{7a^3 \cdot 8b^2}{24b} = \frac{7a^3b}{3}.$$

118. Возведём в квадрат обе части равенства $a - \frac{5}{a} = 2$: $a^2 - 2a \cdot \frac{5}{a} + \frac{25}{a^2} = 4$; $a^2 + \frac{25}{a^2} - 10 = 4$. Отсюда $a^2 + \frac{25}{a^2} = 14$.

120—127. Эти упражнения дают возможность напомнить учащимся формулы сокращённого умножения.

124. а) Выполним умножение дробей:

$$\frac{5mn - m}{4m + n} \cdot \frac{16m^2 - n^2}{5n - 1} = \frac{m(5n-1)(4m-n)(4m+n)}{(4m+n)(5n-1)} = m(4m - n).$$

Если $m = \frac{1}{4}$, $n = -3$, то $m(4m - n) = \frac{1}{4}(1 + 3) = 1$.

Учащиеся должны убедиться в том, что при указанных значениях переменных знаменатели заданных дробей не обращаются в нуль.

Действительно, $4m + n = 1 - 3 \neq 0$, $5n - 1 = -16 \neq 0$.

128. Предположим, что $\frac{a}{b}=\left(\frac{m}{n}\right)^2$, тогда

$$ab=\frac{a}{b}\cdot b^2=\left(\frac{m}{n}\right)^2\cdot b^2=\left(\frac{mb}{n}\right)^2.$$

134. в) Представим одночлен $4m^2x$ в виде дроби $\frac{4m^2x}{1}$ и выполним действия:

$$\frac{8mx^2}{3y^3}:(4m^2x)=\frac{8mx^2}{3y^3}:\frac{4m^2x}{1}=\frac{8mx^2\cdot 1}{3y^3\cdot 4m^2x}=\frac{2x}{3my^3}.$$

В дальнейшем следует перейти к сокращённой форме записи.

140. б) $(3a+6b):\frac{2a^2-8b^2}{a+b}=\frac{3(a+2b)(a+b)}{2(a-2b)(a+2b)}=\frac{3(a+b)}{2(a-2b)}.$

Если $a=26$, $b=-12$, то

$$\frac{3(a+b)}{2(a-2b)}=\frac{3(26-12)}{2(26+24)}=\frac{42}{100}=0{,}42.$$

143. а) Так как $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b+a}{ab}$; $\frac{1}{c}=\frac{b+a}{ab}$; $c=\frac{ab}{a+b}$;

б) так как $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$, то $\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}=\frac{a-c}{ac}$; $b=\frac{ac}{a-c}$.

150. а) $\left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right):\frac{4m}{10m-5}=\frac{(2m+1)^2-(2m-1)^2}{(2m-1)(2m+1)}\times$

$\times\frac{5(2m-1)}{4m}=\frac{8m\cdot 5(2m-1)}{(2m-1)(2m+1)4m}=\frac{10}{2m+1}.$

155. б) $\left(\frac{x-2y}{x^2+2xy}-\frac{1}{x^2-4y^2}:\frac{x+2y}{(2y-x)^2}\right)\cdot\frac{(x+2y)^2}{4y^2}.$

Это задание целесообразно выполнять по действиям:

1) $\frac{1}{x^2-4y^2}:\frac{x+2y}{(2y-x)^2}=\frac{(x-2y)^2}{(x-2y)(x+2y)(x+2y)}=\frac{x-2y}{(x+2y)^2}$;

2) $\frac{x-2y}{x^2+2xy}-\frac{x-2y}{(x+2y)^2}=\frac{x-2y}{x+2y}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2y}\right)=\frac{x-2y}{x+2y}\times$

$\times\frac{2y}{x(x+2y)}=\frac{2y(x-2y)}{x(x+2y)^2}$;

3) $\frac{2y(x-2y)}{x(x+2y)^2}\cdot\frac{(x+2y)^2}{4y^2}=\frac{2y(x-2y)}{x\cdot 4y^2}=\frac{x-2y}{2xy}.$

157. $(0{,}5(a-1)^2-18)\cdot\left(\dfrac{a+5}{a-7}+\dfrac{a-7}{a+5}\right)=\dfrac{(a-1)^2-36}{2}\times$

$$\times\frac{(a+5)^2+(a-7)^2}{(a-7)(a+5)}=\frac{(a-7)(a+5)(2a^2-4a+74)}{2\cdot(a-7)(a+5)}=\frac{2a^2-4a+74}{2}=$$

$$=\frac{2(a^2-2a+37)}{2}=a^2-2a+37=(a-1)^2+36.$$

Эта сумма принимает наименьшее значение при $a-1=0$, т. е. при $a=1$. Наименьшее значение исходного выражения равно 36.

158. Преобразуем знаменатель дроби:

$(0{,}5b+9)^2+(0{,}5b-9)^2=0{,}25b^2+9b+81+0{,}25b^2-9b+$ $+81=0{,}5b^2+162.$

Дробь принимает наибольшее значение при наименьшем значении знаменателя, т. е. при $b=0$. Наибольшее значение исходного выражения равно $\dfrac{81}{162}$, т. е. равно 0,5.

159. б) Преобразуем левую и правую части равенства.

$$\frac{a+b}{2(a-b)}-\frac{a-b}{2(a+b)}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{2(a^2-b^2)}=\frac{4ab}{2(a^2-b^2)}=\frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

$$\frac{b}{a-b}-\frac{b^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{b(a+b)-b^2+ab}{a^2-b^2}=\frac{b^2+ab-b^2+ab}{a^2-b^2}=\frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

Выражения, стоящие в левой и правой частях равенства, тождественно равны одной и той же дроби, следовательно, они тождественно равны.

160. а) $\dfrac{1{,}2x^2-xy}{0{,}36x^2-0{,}25y^2}=\dfrac{2x(0{,}6x-0{,}5y)}{(0{,}6x-0{,}5y)(0{,}6x+0{,}5y)}=$

$$=\frac{2x}{0{,}6x+0{,}5y}=\frac{20x}{6x+5y}.$$

161. б) Преобразуем разность дробей, стоящую в скобках:

$$\frac{x}{(x-y)^2}-\frac{y}{x^2-y^2}=\frac{x}{(x-y)^2}-\frac{y}{(x-y)(x+y)}=\frac{x(x+y)-y(x-y)}{(x-y)^2(x+y)}=$$

$$=\frac{x^2+xy-xy+y^2}{(x-y)^2(x+y)}=\frac{x^2+y^2}{(x-y)^2(x+y)}.$$

Имеем

$$\frac{y}{x-y}-\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{(x-y)^2(x+y)}=\frac{y}{x-y}-\frac{x(x-y)(x+y)\cdot(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x-y)^2(x+y)}=$$

$$=\frac{y}{x-y}-\frac{x}{x-y}=\frac{y-x}{x-y}=-1.$$

162. Преобразуем данное выражение:

$$\left(\frac{9}{n^2}+\frac{n}{3}\right):\left(\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\right)=\frac{27+n^3}{3n^2}:\frac{9-3n+n^2}{3n^2}=\frac{(27+n^3)\cdot 3n^2}{(9-3n+n^2)\cdot 3n^2}=$$

$$=\frac{(n+3)(9-3n+n^2)}{9-3n+n^2}=n+3.$$

Если n — натуральное число, то $n+3$ также является натуральным числом.

163. Можно показать различные способы решения.

а) $\left(n+\frac{1}{n}\right)^2=n^2+2+\frac{1}{n^2}=\frac{n^4+2n^2+1}{n^2}$,

а можно иначе:

$$\left(n+\frac{1}{n}\right)^2=\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^2=\frac{n^4+2n^2+1}{n^2};$$

б) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2=\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{a^2b^2}$.

Или другой способ:

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{a^2}{b^2}-2+\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{a^2b^2};$$

г) можно применить формулу разности квадратов:

$$\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}+\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)=2\frac{q}{p}\cdot 2\frac{p}{q}=4.$$

164, 165. Удобно воспользоваться основным свойством дроби и умножить числитель и знаменатель на одно и то же выражение, подобрав его так, чтобы члены дроби стали целыми выражениями.

164. б) Умножив числитель и знаменатель дроби на b, получим

$$\frac{2a-b+b}{2a+b-b}=\frac{2a}{2a}=1;$$

в) умножив числитель и знаменатель дроби на x^2y^2, получим $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$;

г) умножив числитель и знаменатель дроби на произведение abc, получим $\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}$.

165. б) $$\frac{\frac{a-b}{c}+3}{\frac{a+b}{c}-1}=\frac{\left(\frac{a-b}{c}+3\right)c}{\left(\frac{a+b}{c}-1\right)c}=\frac{a-b+3c}{a+b-c};$$

г) $$\frac{x-y}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}=\frac{(x-y)xy}{\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)xy}=\frac{(x-y)xy}{x^2-y^2}=\frac{xy}{x+y}.$$

166. б) При $x=\dfrac{a-b}{a+b}$ имеем

$$\frac{\frac{a}{b}-x}{\frac{b}{a}+x}=\frac{\frac{a}{b}-\frac{a-b}{a+b}}{\frac{b}{a}+\frac{a-b}{a+b}}=\frac{\left(\frac{a}{b}-\frac{a-b}{a+b}\right)ab(a+b)}{\left(\frac{b}{a}+\frac{a-b}{a+b}\right)ab(a+b)}=\frac{a^3+ab^2}{b^3+a^2b}=\frac{(a^2+b^2)a}{b(a^2+b^2)}=\frac{a}{b}.$$

167. а) $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x+1-x}{1+x-1+x}=\frac{2}{2x}=\frac{1}{x};$$

б) $$\frac{ax}{a+x}-\frac{bx}{b-x}=\frac{a\cdot\frac{ab}{a-b}}{a+\frac{ab}{a-b}}-\frac{b\cdot\frac{ab}{a-b}}{b-\frac{ab}{a-b}}=\frac{a^2b}{a^2-ab+ab}-$$
$$-\frac{ab^2}{ab-b^2-ab}=b+a.$$

169. (*Для работы в парах.*) Очевидно, что в задании «а» не является допустимым значение $x=2$, а в задании «б» — значение $x=-8$. Чтобы найти остальные значения переменных, которые не являются допустимыми, надо выполнить преобразования.

а) $$\frac{1}{3-\frac{1}{x-2}}=\frac{1}{\frac{3x-6-1}{x-2}}=\frac{x-2}{3x-7}.$$

Не является допустимым значение $x=\dfrac{7}{3}$. Итак, выражение имеет смысл при $x\neq 2$ и $x\neq 2\dfrac{1}{3}$;

б) $$\frac{6x}{2+\frac{1}{x+8}}=\frac{6x(x+8)}{2x+16+1}=\frac{6x(x+8)}{2x+17}.$$

Не является допустимым значение $x=-\dfrac{17}{2}$. Итак, выражение имеет смысл при $x\neq -8$ и $x\neq -8\dfrac{1}{2}$.

170. а) $\dfrac{2}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}}=\dfrac{2\cdot 15}{8}=\dfrac{15}{4}=3{,}75;$

б) $\dfrac{3}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}}=\dfrac{3\cdot 8}{7}=\dfrac{24}{7}=3\dfrac{3}{7}.$

171—173. Для решения этих задач можно воспользоваться формулой среднего гармонического.

171. $v_{\text{ср}}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{60}+\dfrac{1}{90}}=\dfrac{2\cdot 180}{3+2}=72$ (км/ч).

172. $t_{\text{ср}}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{2\cdot 12}{2+3}=\dfrac{24}{5}=4{,}8$ (ч).

173. $v_{\text{ср}}=\dfrac{3}{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{10}}=\dfrac{3\cdot 180}{20+15+18}=\dfrac{540}{53}\approx 10{,}2$ (км/ч).

188. (*Для работы в парах.*) а), б) Графики пересекаются в одной точке. Уравнение имеет единственное решение;

в) графики пересекаются в двух точках. Уравнение имеет два решения;

г) графики не пересекаются. Уравнение не имеет решений.

190. б) Чтобы определить значение коэффициента k обратной пропорциональности $y=\dfrac{k}{x}$, следует подставить в формулу вместо x и y координаты точки B. Получим

$$\frac{2}{3}=\frac{k}{1\frac{4}{5}};\; k=1\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3};\; k=\frac{9\cdot 2}{5\cdot 3};\; k=1{,}2.$$

195. (*Задача-исследование.*) Следует привести дроби, стоящие в правой части равенства, к общему знаменателю, а затем умножить обе части равенства на этот знаменатель. Получим

$$5x+31=a(x+2)+b(x-5);\quad 5x+31=(a+b)x+(2a-5b).$$

Приравняем коэффициенты при x и свободные члены. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a+b=5,\\ 2a-5b=31. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара чисел: $a=8$, $b=-3$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

240. Преобразуем выражение

$$\frac{2}{mn} : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{m^2+n^2}{(m-n)^2} = \frac{2}{mn} : \frac{(n-m)^2}{m^2n^2} - \frac{m^2+n^2}{(m-n)^2} = \frac{2m^2n^2}{mn(m-n)^2} -$$

$$- \frac{m^2+n^2}{(m-n)^2} = \frac{2mn-m^2-n^2}{(m-n)^2} = \frac{-(m-n)^2}{(m-n)^2} = -1.$$

Исходное выражение не зависит от значений m и n при всех допустимых значениях переменных, т. е. при $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $m \neq n$.

241. Преобразуем выражение

$$\left(a - \frac{a^2+x^2}{a+x}\right) \cdot \left(\frac{2a}{x} + \frac{4a}{a-x}\right) = \frac{a^2+ax-a^2-x^2}{a+x} \cdot \frac{2a^2-2ax+4ax}{x(a-x)} =$$

$$= \frac{x(a-x) \cdot 2a(a+x)}{(a+x) \cdot x(a-x)} = 2a.$$

По условию a — целое число, x — дробное число. Следовательно, $x \neq 0$ и $|a| \neq |x|$, т. е. данное выражение имеет смысл. Так как a — целое число, то $2a$ — число чётное.

243. в) $$\left(\frac{1}{(2a-b)^2} + \frac{2}{4a^2-b^2} + \frac{1}{(2a+b)^2}\right) \cdot \frac{4a^2+4ab+b^2}{16a} =$$

$$= \frac{4a^2+4ab+b^2+8a^2-2b^2+4a^2-4ab+b^2}{(2a-b)^2(2a+b)^2} \cdot \frac{4a^2+4ab+b^2}{16a} =$$

$$= \frac{16a^2 \quad (2a+b)^2}{(2a-b)^2(2a+b)^2 \cdot 16a} = \frac{a}{(2a-b)^2}.$$

245. Преобразуем отдельно левую и правую части равенства:

$$\frac{1}{p-2q} + \frac{6q}{4q^2-p^2} - \frac{2}{p+2q} = \frac{p+2q-6q-2p+4q}{(p-2q)(p+2q)} = \frac{-p}{p^2-4q^2};$$

$$-\frac{1}{2p}\left(\frac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2} + 1\right) = -\frac{1}{2p} \cdot \frac{p^2+4q^2+p^2-4q^2}{p^2-4q^2} = \frac{-2p^2}{2p(p^2-4q^2)} =$$

$$= \frac{-p}{p^2-4q^2}.$$

Выражения, стоящие в обеих частях равенства, тождественно равны одной и той же дроби, следовательно, они тождественно равны.

246. Преобразуем левую часть равенства:

$$a^3+b^3+\left(\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}\right)^3=\frac{(a^3+b^3)(a^3-b^3)^3+b^3(2a^3+b^3)^3}{(a^3-b^3)^3}.$$

Преобразуем числитель полученной дроби:

$(a^3+b^3)(a^3-b^3)^3+b^3(2a^3+b^3)^3=(a^6-b^6)(a^6-2a^3b^3+b^6)+$ $+b^3(8a^9+12a^6b^3+6a^3b^6+b^9)=a^{12}+6a^9b^3+8a^3b^9+12a^6b^6=$ $=a^3(a^3+2b^3)^3=(a(a^3+2b^3))^3$.

Значит, левая часть тождественно равна выражению $\frac{(a(a^3+2b^3))^3}{(a^3-b^3)^3}$, т. е. равна $\left(\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}\right)^3$. Тождество доказано.

247. Умножим числитель и знаменатель первой дроби на 36, а второй — на 4. Получим

$$\frac{6(9a^2-12ab+4b^2)}{9a^2-4b^2}+\frac{24b}{3a+2b}=\frac{6(9a^2-12ab+4b^2+12ab-8b^2)}{9a^2-4b^2}=$$

$$=\frac{6(9a^2-4b^2)}{9a^2-4b^2}=6.$$

Исходное выражение не зависит от a и b при всех допустимых значениях a и b, т. е. при $a\neq\pm\frac{2}{3}b$.

248. в) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{x+1}}=\dfrac{x+1}{x+1+x}=\dfrac{x+1}{2x+1}.$

249. а) Очевидно, что не являются допустимыми значения $x=2$ и $x=-2$. Выполним преобразования:

$$\frac{\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{3x}{x^2-4}}=\frac{(x+2+x^2-2x)\cdot(x^2-4)}{(x^2-4)\cdot 3x}=\frac{x^2-x+2}{3x}.$$

Значение $x=0$ также не является допустимым. Следовательно, дробь имеет смысл при $x\neq-2$, $x\neq0$ и $x\neq2$;

б) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}=\dfrac{x-1}{x-1-x}=1-x.$

Выражение имеет смысл при $x\neq0$ и $x\neq1$.

250. Искомое время можно вычислить как среднее гармоническое чисел 8, 9 и 12:

$$t=\frac{3}{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}}=\frac{3\cdot72}{9+8+6}=\frac{216}{23}\approx9{,}4\ \text{(ч)}.$$

252. Воспользуемся определением среднего гармонического: $z=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$. Подставим это выражение вместо z в исходное выражение и преобразуем его:

$$\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}=\frac{1}{\dfrac{2ab}{a+b}-a}+\frac{1}{\dfrac{2ab}{a+b}-b}=\frac{a+b}{ab-a^2}+\frac{a+b}{ab-b^2}=$$

$$=\frac{a+b}{a(b-a)}+\frac{a+b}{b(a-b)}=\frac{-ab-b^2+a^2+ab}{ab(a-b)}=\frac{a^2-b^2}{ab(a-b)}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}.$$

256. б) Преобразуем выражение, стоящее в правой части формулы:

$$\frac{18-12x}{x^2-3x}+\frac{6}{x-3}=\frac{18-12x}{x(x-3)}+\frac{6}{x-3}=\frac{18-12x+6x}{x(x-3)}=\frac{18-6x}{x(x-3)}=$$

$$=\frac{6(3-x)}{x(x-3)}=-\frac{6}{x}.$$

Область определения функции: $x\neq 0$; $x\neq 3$. Графиком функции является гипербола $y=-\dfrac{6}{x}$ с «выколотой» точкой, абсцисса которой равна 3.

257. а) Можно построить часть графика функции $\dfrac{4}{|x|}$ для $x>0$, а затем построить линию, симметричную этой кривой относительно оси y;

г) можно построить часть графика функции $y=-\dfrac{1}{|x|}$ для $x>0$, а затем построить линию, симметричную этой кривой относительно оси y.

258. Запишем формулу $y=\dfrac{17}{5x}$ в виде $y=\dfrac{3{,}4}{x}$. Отсюда ясно, что функция является обратной пропорциональностью $y=\dfrac{k}{x}$ с коэффициентом $k=3{,}4$.

259. а) Графиком функции $y=\dfrac{3x}{8}$, т. е. $y=\dfrac{3}{8}x$, является прямая, проходящая через начало координат;

б) графиком функции $y=\dfrac{8}{3x}$, т. е. $y=\dfrac{\frac{8}{3}}{x}$, является гипербола, расположенная в I и III координатных четвертях.

260. а) Так как гипербола $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $P(2;\,1)$, то $1=\frac{k}{2}$, откуда получаем, что $k=2$. Так как прямая $y=kx+b$ при $k=2$ проходит через точку $P(2;\,1)$, то $1=2\cdot2+b$, откуда $b=-3$.

261. а) Да, если $a=0$, т. е. если прямая параллельна оси x;

б) да, если $a\neq0$; в) нет.

262. а) Да, если коэффициенты k и a имеют разные знаки (например, рис. 1, *а*); б) нет, так как обе ветви гиперболы не могут быть расположены в верхней полуплоскости;

в) да, если коэффициенты k и a положительны (например, рис. 1, *б*).

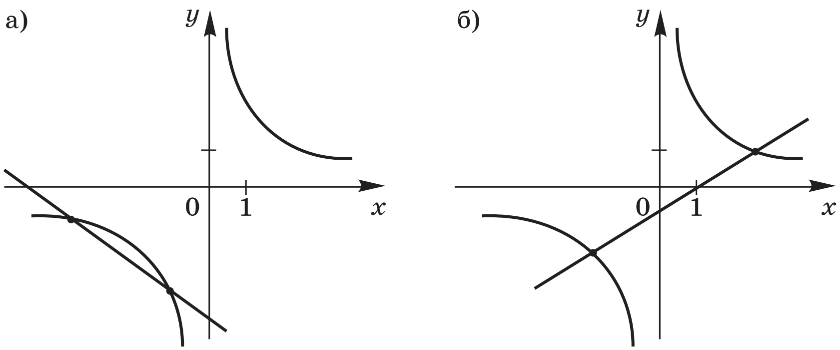


Рис. 1

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 5

12. Возведём в квадрат обе части равенства $2b-\frac{7}{b}=5$. Получим

$$4b^2-2\cdot2b\cdot\frac{7}{b}+\frac{49}{b^2}=25;\quad 4b^2-28+\frac{49}{b^2}=25;\quad 4b^2+\frac{49}{b^2}=53.$$

13. а) $$\frac{p^m-2}{p^{2m}-2p^m+4}\cdot\frac{p^{3m}+8}{p^{2m}-4}=$$

$$=\frac{(p^m-2)(p^m+2)(p^{2m}-2p^m+4)}{(p^{2m}-2p^m+4)(p^m-2)(p^m+2)}=1.$$

П у н к т 6

12. Преобразуем первую дробь:

$$\frac{25-a^2+4ab-4b^2}{10b+2ab-a^2+25}=\frac{25-(a^2-4ab+4b^2)}{2b(a+5)-(a-5)(a+5)}=$$

$$=\frac{25-(a-2b)^2}{(a+5)(2b-a+5)}=\frac{(5-a+2b)(5+a-2b)}{(a+5)(2b-a+5)}=\frac{5+a-2b}{a+5}.$$

Выполним деление:

$$\frac{5+a-2b}{a+5}:\frac{2b-5-a}{3a+15}=\frac{(5+a-2b)\cdot 3(a+5)}{(a+5)(2b-5-a)}=-3.$$

Значение частного не зависит от значений переменных a и b при всех допустимых значениях a и b, т. е. при $a\neq-5$ и $a\neq 2b+5$.

13. а) $\dfrac{x^{2n}-4}{y^{n+1}}:\dfrac{x^n+2}{y^{2n+1}}=\dfrac{(x^n-2)(x^n+2)\cdot y^{2n+1}}{y^{n+1}\cdot(x^n+2)}=(x^n-2)\cdot y^n;$

б) $\dfrac{a^{12}(b-1)^{3n}}{c^{2n}}:\dfrac{a^6(b-1)^{3n-1}}{c^{4n}}=\dfrac{a^{12}(b-1)^{3n}c^{4n}}{c^{2n}\cdot a^6(b-1)^{3n-1}}=a^6c^{2n}(b-1).$

14. Преобразуем выражение

$$\frac{x^2+4x-21}{x^2+10x+21}:\frac{x-3}{(2x+6)^3}=\frac{x^2+7x-3x-21}{x^2+3x+7x+21}:\frac{x-3}{2^3(x+3)^3}=$$

$$=\frac{(x-3)(x+7)\cdot 8(x+3)^3}{(x+3)(x+7)(x-3)}=8(x+3)^2.$$

Значение выражения $8(x+3)^2$ неотрицательно при всех значениях x, следовательно, значение исходного выражения неотрицательно при всех допустимых значениях x, т. е. при $x\neq-3$, $x\neq 3$ и $x\neq-7$.

П у н к т 7

6. Упростим исходное выражение:

$$\left(\frac{m-2}{m}-\frac{3}{m+2}+1\right):\frac{2m}{m+2}-\frac{2m^2+m+4}{2m^2}=\frac{m^2-4-3m+m^2+2m}{m(m+2)}\times$$

$$\times\frac{m+2}{2m}-\frac{2m^2+m+4}{2m^2}=\frac{(2m^2-m-4)(m+2)}{m(m+2)\cdot 2m}-\frac{2m^2+m+4}{2m^2}=$$

$$=\frac{2m^2-m-4-2m^2-m-4}{2m^2}=\frac{-m-4}{m^2}.$$

Значение числителя этой дроби при $m>0$ — число отрицательное, а значение знаменателя — число положительное. Следовательно, значение исходного выражения является отрицательным числом при любом $m>0$.

7. Преобразуем выражение

$$\left(\frac{1}{(a-x)(x-2)}+\frac{1}{(a-x)(a-2)}-\frac{1}{(x-2)(a-2)}\right):\frac{4}{a-x}:\frac{1}{(a+2)^2-8a}=$$

$$=\frac{a-2+x-2-a+x}{(a-x)(x-2)(a-2)}:\frac{4}{a-x}:\frac{1}{a^2+4a+4-8a}=$$

$$=\frac{2(x-2)(a-x)\cdot(a-2)^2}{(a-x)(x-2)(a-2)\cdot 4}=\frac{a-2}{2}.$$

Если $a>2$, то $\frac{a-2}{2}>0$, следовательно, значение исходного выражения положительно при $a>2$ и любом допустимом значении x.

8. При условии, что $a+b=5$, $ab=2$, найдём значение уменьшаемого:

$$\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2ab}\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}.$$

Вычислим значение a^2+b^2:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=25-4=21.$$

Тогда $\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{2ab}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2\cdot 2ab}=\frac{21}{16}$. Получаем $\frac{25}{16}-\frac{21}{16}=\frac{1}{4}$.

10. $$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2x-3}}}=1+\frac{1}{1+\frac{2x-3}{2x-2}}=1+\frac{2x-2}{2x-2+2x-3}=$$

$$=1+\frac{2x-2}{4x-5}=\frac{6x-7}{4x-5}.$$

11. $$\frac{16}{\left(\frac{c}{4}-2\right)^2+\left(\frac{c}{4}+2\right)^2}=\frac{16}{2\cdot\frac{c^2}{16}+8}=\frac{16}{\frac{c^2}{8}+8}=\frac{128}{c^2+64}.$$

Эта дробь принимает наибольшее значение при наименьшем значении знаменателя, т. е. при $c=0$. Наибольшее значение исходного выражения равно 2.

Пункт 8

11. а) Найдём значение k из уравнения $y=\frac{k}{x}$, подставив в него координаты точки $M(4;\ 5)$: $5=\frac{k}{4}$, отсюда $k=20$. Из уравнения $y=kx+b$ найдём значение b: $b=-75$.

14. Составим и решим уравнение:

$$\frac{16}{x} = -x - 8; \quad 16 = -x^2 - 8x; \quad x^2 + 8x + 16 = 0; \quad (x + 4)^2 = 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение: $x = -4$. Следовательно, гипербола $y = \frac{16}{x}$ и прямая $y = -x - 8$ имеют только одну общую точку. Её координаты $(-4; -4)$.

Для тех, кто хочет знать больше

Пункт 9. Представление дроби в виде суммы дробей

Методический комментарий

Одна из особенностей учебника «Алгебра, 8» под редакцией С. А. Теляковского состоит в том, что, по аналогии с учебником «Алгебра, 7», каждую главу завершает дополнительный пункт под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше», в котором представлен фрагмент теории и соответствующие упражнения. Тематика подобных дополнений к главам определена так, чтобы включённый в них материал естественным образом был связан с материалом основного курса и выводил учащихся, интересующихся математикой, за рамки обязательной программы, позволяя им подняться на новую ступень в достижении личностных, метапредметных и предметных результатов обучения.

В главе I учащиеся познакомились с преобразованием суммы дробей в дробь. В данном пункте рассматривается обратная задача — представление дроби в виде суммы дробей. Следует обратить внимание учащихся на то, что эта задача неопределённая, для каждой дроби она допускает бесконечно много решений. В зависимости от конкретной задачи выбирается соответствующий способ замены дроби тождественно равной ей суммой дробей.

В примере 1 учебника показано, как можно дробь $\frac{7x}{(x-3)(x+4)}$ представить в виде суммы дробей со знаменателями $x - 3$ и $x + 4$. Этот пример позволяет познакомить учащихся с методом неопределённых коэффициентов, широко используемым в математике при решении задач. Нестандартность использованного здесь способа решения, безусловно, привлечёт внимание учащихся, интересующихся математикой. Метод неопределённых коэффициентов они смогут применить при выполнении упражнений **197—199**. Рассмотренный в учебнике пример 2 интересен тем, что в нём учащиеся возвращаются к задаче решения линейного уравнения с двумя переменными в целых числах. В примере 3 они встречаются со случаем, когда для представления дроби в виде суммы многочлена и дроби используется деление многочлена на многочлен уголком, аналогично тому, как это делалось при делении натурального числа на натуральное. Преобразования, использованные в примерах 2 и 3, находят применение при выполнении упражнений **200—207**.

Изучение данного пункта можно провести в форме занятия математического кружка. На этом занятии один из учащихся может рассказать о приёме решения задачи, рассмотренной в примере 1, а другой — о приёмах, рассмотренных в примерах 2 и 3. После этого учащиеся под руководством учителя могут выполнить некоторые из упражнений, представленных в данном пункте. Остальные упражнения рекомендуется предложить им для домашней работы.

Изучение представленных в данном пункте сведений из теории и выполнение включённых в него разнообразных упражнений создаёт благоприятные условия для интеллектуального развития учащихся, интересующихся математикой.

Рекомендуется, чтобы учащиеся, интересующиеся математикой, имели специальную тетрадь для выполнения упражнений, представленных в пунктах под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше». Желательно, чтобы учитель периодически проверял эти тетради, оценивая высокими баллами правильные решения задач, самостоятельно выполненных учащимися.

Указания к упражнениям из учебника

При выполнении заданий **197—199** применяется метод неопределённых коэффициентов.

197. $\dfrac{6x}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$;

$$\frac{6x}{(x-1)(x-2)} = \frac{(a+b)x-2a-b}{(x-1)(x-2)}.$$

Это равенство будет тождеством, если $a+b=6$ и $-2a-b=0$. Решив систему уравнений $\begin{cases} a+b=6, \\ -2a-b=0, \end{cases}$ получим $a=-6$, $b=12$. Следовательно, $\dfrac{6x}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{12}{x-2} - \dfrac{6}{x-1}$.

198. $\frac{5x-1}{(x+4)(x-2)}=\frac{a}{x+4}+\frac{b}{x-2}$;

$$\frac{5x-1}{(x+4)(x-2)}=\frac{(a+b)x+4b-2a}{(x+4)(x-2)}.$$

Это равенство выполняется, если $a+b=5$ и $4b-2a=-1$.

Составим систему уравнений $\begin{cases}a+b=5,\\-2a+4b=-1.\end{cases}$

Решив эту систему, получим $a=3{,}5$, $b=1{,}5$.

199. $\frac{4x+3}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$; $\frac{4x+3}{x^2-1}=\frac{(a+b)x+a-b}{(x-1)(x+1)}$;

$\begin{cases}a+b=4,\\a-b=3.\end{cases}$ Решив систему, получим $a=3{,}5$, $b=0{,}5$.

200. Представим заданную дробь в виде суммы целого выражения и дроби: $\frac{a^2-4a+1}{a-2}=a-2+\frac{3}{2-a}$.

Правая часть равенства является целым числом, если знаменатель дроби является делителем числа 3, т. е. если $2-a=-1$ или $2-a=1$ или $2-a=-3$ или $2-a=3$.

Получаем значения a: -1; 1; 3; 5. Значения дроби при данных значениях a равны соответственно -2; 2; -2; 2.

201. (*Для работы в парах.*) а) Представим заданную дробь в виде суммы целого выражения и дроби:

$$\frac{m^2-6m+10}{m-3}=\frac{(m-3)^2+1}{m-3}=m-3+\frac{1}{m-3}.$$

Правая часть равенства является целым числом, если $(m-3)$ является делителем 1, т. е. одним из чисел: -1; 1. Возможны два варианта: $m=2$ или $m=4$.

Если $m=2$, значение исходной дроби равно -2; если $m=4$, значение исходной дроби равно 2.

б) $\frac{(m-4)^2}{m-2}=\frac{m^2-8m+12}{m-2}+\frac{4}{m-2}=m-6+\frac{4}{m-2}$.

Правая часть равенства является целым числом, если $(m-2)$ является делителем числа 4, т. е. одним из чисел: 1; -1; 2; -2; 4; -4. Возможны шесть вариантов: $m=3$; $m=1$; $m=4$; $m=0$; $m=6$; $m=-2$. Значения исходной дроби равны соответственно 1; -9; 0; -8; 1; -9.

202. Выразим из условия переменную y через x:

а) $5x + y - xy = 2;\ 5x - y(x-1) = 2;\ y = \dfrac{5x-2}{x-1} = 5 + \dfrac{3}{x-1}$.

Значение y является целым, если $x - 1 = -1$ или $x - 1 = 1$ или $x - 1 = -3$ или $x - 1 = 3$. Искомые пары целых чисел: (0; 2), (2; 8), (–2; 4), (4; 6).

203. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 1}{x-3};\ y = \dfrac{x^2 - 6x + 9 - 8}{x-3} = x - 3 - \dfrac{8}{x-3}$.

Выпишем все делители числа 8: –8; –4; –2; –1; 1; 2; 4; 8.

Получим 8 точек с целочисленными координатами: (–5; –7), (–1; –2), (1; 2), (2; 7), (4; –7), (5; –2), (7; 2), (11; 7).

204. Преобразуем дробь $\dfrac{5a^2+6}{a^2+1} = 5 + \dfrac{1}{a^2+1}$ (a — целое число, $a \neq 0$).

При $a \neq 0$ знаменатель дроби $a^2 + 1 > 1$. Следовательно, данная дробь не может быть целым числом.

205. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{7};\ 7a + 7b = ab$ (a, b — натуральные числа).

Выразим b через a: $b = \dfrac{7a}{a-7};\ b = 7 + \dfrac{49}{a-7}$.

Возможны три варианта: $a - 7 = 1;\ a = 8;\ b = 56;\ a - 7 = 7;\ a = 14;\ b = 14;\ a - 7 = 49;\ a = 56;\ b = 8$.

206. Из условия $\dfrac{x-y}{y} = 2$ найдём, что $\dfrac{x}{y} - 1 = 2;\ \dfrac{x}{y} = 3$.

Преобразуем дробь $\dfrac{3x^2 - xy + 6y^2}{y^2}$, разделив числитель почленно на y^2:

$$\frac{3x^2 - xy + 6y^2}{y^2} = 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 6.$$

Подставив вместо $\dfrac{x}{y}$ его значение 3, получим значение дроби, равное 30.

207. Из условия $\dfrac{a+2b}{a} = 11$ найдём, что $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{5}$.

$$\frac{(a-3b)^2}{b^2} = \frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\cdot\frac{a}{b} + 9.$$

Если $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{5}$, то $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 6\cdot\dfrac{a}{b} + 9 = \dfrac{1}{25} - 6\cdot\dfrac{1}{5} + 9 = 7\dfrac{21}{25}$.

Квадратные корни

§ 4. Действительные числа

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
10	Рациональные числа	1 (1)
11	Иррациональные числа	1 (2)

Содержание материала

В данном параграфе повторяются известные учащимся сведения о множествах натуральных, целых и рациональных чисел, вводятся соответствующие обозначения и объясняется происхождение этих обозначений. Здесь определяются понятия подмножества и разности множеств, рассматривается вопрос о представлении рациональных чисел в виде десятичных дробей, вводятся понятия действительного числа и иррационального числа.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы систематизировать и обобщить известные учащимся сведения о рациональных числах, сформировать начальные представления о действительных числах, о взаимно однозначном соответствии между множеством действительных чисел и множеством точек на координатной прямой, ввести понятие иррационального числа.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны уметь приводить примеры рациональных и иррациональных чисел, описывать соотношения между множествами натуральных и целых чисел, целых и рациональных чисел, рациональных и действительных чисел, сравнивать действительные числа. Они должны также уметь находить в несложных ситуациях значения выражений с переменными, предварительно округляя до указанного разряда значения переменных, входящих в эти выражения и представленных в виде бесконечных десятичных дробей.

Методический комментарий

В пункте 10 «Рациональные числа» расширяются известные учащимся сведения о числах. Следует обратить внимание на то, что множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел, а множество целых чисел — подмножеством множества рациональных чисел. Новым для учащихся является вопрос о представлении рациональных чисел в виде бесконечных десятичных дробей. Они узнают, что каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби и что верно также обратное утверждение: всякая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет некоторое рациональное число. Тем самым закладывается основа для введения понятия действительного числа и рассмотрения соотношения между множествами рациональных и действительных чисел.

Понятия действительного и иррационального чисел вводятся в пункте 11 «Иррациональные числа». Сначала рассматриваются примеры 1 и 2, в каждом из которых результатом измерения длины отрезка является бесконечная десятичная периодическая дробь, т. е. рациональное число. Затем в примере 3 представлен особый случай, когда на координатной прямой отмечена точка, соответствующая числу, квадрат которого равен 2. Учащиеся узнают, что среди рациональных чисел такого числа нет. (Приведённое доказательство в силу его сложности можно опустить.) Отсюда делается вывод, что отмеченной точке соответствует бесконечная непериодическая десятичная дробь. После этого вводятся понятия действительного числа и иррационального числа. Важно подчеркнуть, что между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой существует взаимно однозначное соответствие.

Включённые в § 4 упражнения являются достаточно простыми. Многие из них учащиеся могут выполнить устно. Специальное внимание рекомендуется уделить усложнённым заданиям **292** и **293**. Из дополнительных упражнений к § 4 полезно остановиться при наличии времени на заданиях **461** и **462**, в которых проверяется усвоение понятий рационального и иррационального чисел.

Указания к основным упражнениям учебника

267. В результате деления числителя дроби на знаменатель учащиеся получают бесконечную десятичную периодическую дробь.

г) $-\frac{20}{9} = -2{,}(2)$; и) $-1\frac{3}{40} = -1{,}075(0)$; к) $2\frac{7}{11} = 2{,}(63)$.

268. Для сравнения обыкновенной дроби с десятичной следует представить обыкновенную дробь в виде десятичной или десятичную дробь в виде обыкновенной.

Для сравнения обыкновенных дробей с разными знаменателями обычно приводят их к общему знаменателю и сравнивают полученные числители или каждую из дробей представляют в виде десятичной дроби и сравнивают десятичные представления.

е) *I способ.* $\frac{10}{11} = \frac{10 \cdot 12}{11 \cdot 12} = \frac{120}{132}$ и $\frac{11}{12} = \frac{11 \cdot 11}{12 \cdot 11} = \frac{121}{132}$.

Так как числитель первой дроби меньше числителя второй $(120 < 121)$, то $\frac{10}{11} < \frac{11}{12}$.

II способ. $\frac{10}{11} = 0{,}90\ldots$, $\frac{11}{12} = 0{,}91\ldots$. Так как $0{,}90\ldots < 0{,}91\ldots$, то $\frac{10}{11} < \frac{11}{12}$.

В этом примере возможен ещё один способ рассуждений. Дробь $\frac{10}{11}$ меньше 1 на $\frac{1}{11}$, а дробь $\frac{11}{12}$ меньше 1 на $\frac{1}{12}$. Так как $\frac{1}{11} > \frac{1}{12}$, то первая дробь меньше второй.

270. г) Возможны два способа решения: либо привести обыкновенные дроби к новому общему знаменателю, либо представить каждую из них в виде десятичной дроби.

271. г) Так как $-\frac{1}{3} = -0{,}(3)$, $-\frac{1}{4} = -0{,}25$, то между числами $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}$ заключены, например, числа $-0{,}32$; $-0{,}3$; $-0{,}298$; $-0{,}28$; $-0{,}251$.

281. Это упражнение даёт возможность напомнить учащимся, что означает число π и каково его представление в виде десятичной дроби: $\pi = 3{,}1415926\ldots$.

д) $\pi > 3{,}1415$; е) $3{,}(14) < \pi$.

284. а) Расстояние между точками C и M равно $4{,}514 - 1{,}304$, т. е. равно $3{,}21$, а расстояние между точками D и M равно $1{,}304 + 1{,}9368\ldots$, т. е. равно $3{,}2408\ldots$, и $3{,}21 < 3{,}2408\ldots$. Следовательно, точка C ближе к точке M, чем точка D.

292. Сумма $a + b$ является иррациональным числом, так как она имеет вид: $3{,}6363363336\ldots$, где группы цифр, состоящие из одной, двух и т. д. троек, разделяются цифрой 6.

293. Так как $a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$ и $a \neq b$, то $a + b$ — число рациональное как частное от деления одного рационального числа на другое число, отличное от нуля.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

454. Сумма и произведение натуральных чисел являются числами натуральными. Говорят, что множество натуральных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения. Разность двух натуральных чисел и частное от деления одного натурального числа на другое не всегда являются натуральными числами. Надо предложить учащимся привести соответствующие примеры.

455. Сумма, разность и произведение двух целых чисел являются целыми числами. Множество целых чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения. Частное от деления целого числа a на целое число $b\,(b \neq 0)$ не всегда является целым числом. Следует предложить учащимся привести соответствующие примеры.

456. Сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел являются числами рациональными. (Исключение составляет лишь деление на нуль.) Докажем это на примере разности двух рациональных чисел.

б) Пусть $a = \frac{m}{n}$ и $b = \frac{p}{q}$, где m, n, p, q — любые целые числа, причём $n \neq 0$ и $q \neq 0$. Тогда $a - b = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - pn}{nq}$.

Числитель и знаменатель полученной дроби являются целыми числами, причём $nq \neq 0$. Следовательно, $a - b$ — число рациональное, так как является отношением двух целых чисел.

457. в) Пусть x и y — чётные числа, тогда $x = 2k$, $y = 2l$, где k, l — целые числа. Имеем $3x + y = 3 \cdot 2k + 2l = 2(3k + l)$, где $3k + l$ — целое число как сумма целых чисел. Следовательно, $3x + y$ — число чётное.

462. а) Если a — рациональное число, а b — иррациональное, то сумма $a + b$ является числом иррациональным. Докажем это утверждение способом от противного. Предположим, что сумма $a + b$ есть число рациональное. Тогда b является разностью двух рациональных чисел $a + b$ и a, т. е. числом рациональным, что противоречит условию.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 9

9. Утверждение неверно. Докажем это.

Если a и b — чётные числа, то числа $3a + 2b + 1$ и $a + b + 3$ являются нечётными числами. Следовательно, их произведение также является нечётным числом.

11. г) Возведём в квадрат сумму, стоящую в знаменателе дроби: $(117+176)^2 = 117^2 + 234 \cdot 176 + 176^2$.

Эта сумма на 176^2 больше суммы, стоящей в числителе, следовательно, $\frac{234 \cdot 176 + 117^2}{(117+176)^2} < 1$.

Пункт 10

10. Представим $3\frac{1}{7}$ в виде десятичной дроби: $3\frac{1}{7} = 3,(142857)$ и найдём значения выражений $|\pi - 3,14|$ и $\left|\pi - 3\frac{1}{7}\right|$. Получим

$$|\pi - 3,14| = 0,0015296\ldots;$$

$$\left|\pi - 3\frac{1}{7}\right| \approx 0,0013275\ldots.$$

Вторая разность меньше первой, следовательно, $3\frac{1}{7}$ — более точное приближённое значение числа π, чем 3,14.

13. Между числами 2,9 и π заключены, например, такие иррациональные числа: 3,1010010001... и 3,1313313331... .

§ 5. Арифметический квадратный корень

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
12	Квадратные корни. Арифметический квадратный корень	3 (4)
13	Уравнение $x^2 = a$	
14	Нахождение приближённых значений квадратного корня	1 (1)
15	Функция $y = \sqrt{x}$ и её график	2 (2)

Содержание материала

В данном параграфе вводятся понятия квадратного корня и арифметического квадратного корня. Учащиеся знакомятся с употреблением знака $\sqrt{}$, получают представление о приёмах нахождения значений квадратного корня из числа, в частности с помощью калькулятора. Рассматривается вопрос о числе корней уравнения $x^2 = a$ при $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$. Расширяется запас сведений учащихся о функциях. Они знакомятся со свойствами функции $y = \sqrt{x}$ и её графиком.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы ввести понятие арифметического квадратного корня и соответствующее обозначение, сформировать умение учащихся находить значения квадратных корней, пользуясь при необходимости калькулятором, а также умение решать уравнения вида $x^2 = a$, где a — некоторое число, ознакомить учащихся со свойствами функции $y = \sqrt{x}$ и её графиком.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного параграфа формируется умение учащихся находить значения арифметических квадратных корней, пользуясь при необходимости калькулятором, применять это умение в расчётах по геометрическим и физическим формулам, в записи которых используются квадратные корни. Также формируется умение решать уравнения вида $x^2 = a$, где a — некоторое число, и уравнения, сводящиеся к такому виду. При изучении сведений о функции $y = \sqrt{x}$ продолжается формирование умений учащихся находить по графику значения функции, соответствующие заданным значениям аргумента, и определять, при каком значении аргумента функция принимает указанное значение, а также решать графически простейшие иррациональные уравнения.

Методический комментарий

Изучение § 5 начинается с пункта 12 «Квадратные корни. Арифметический квадратный корень». Необходимо, чтобы все учащиеся овладели представленным в этом пункте материалом. Иначе дальнейшее изучение курса станет для них невозможным. Учащиеся должны усвоить понятия квадратного корня и арифметического квадратного корня, научиться находить значения выражений, содержащих квадратные корни из чисел, являющихся полными квадратами. В систему упражнений, представленных в данном пункте, включены задания на решение уравнений вида $\sqrt{x} = b$, где b — некоторое число. Полезно остановиться на предназначенном для работы в парах упражнении **313**, где предлагается решить уравнения, сводящиеся к такому виду.

В пункте 13 рассматривается вопрос о решении уравнений вида $x^2 = a$. Важно, чтобы учащиеся усвоили, что уравнение такого вида при $a < 0$ не имеет корней, при $a = 0$ имеет единственный корень — число 0, при $a>0$ имеет два корня: $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. Этот вывод делается с опорой на графические представления учащихся, которым известно, что прямая $y=a$ при $a<0$ не пересекает график функции $y=x^2$, при $a=0$ касается этого графика в точке с абсциссой нуль, а при $a>0$ пересекает его в двух точках, абсциссы которых равны $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. Необходимо подчеркнуть, что корни уравнения $x^2=a$ могут быть рациональными и иррациональными числами. С решением уравнений такого вида учащиеся встречаются в упражнениях **319—324**.

При изучении материала, представленного в данном пункте, важно обратить внимание учащихся на то, что при любом $a \geqslant 0$ выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл и верно равенство $(\sqrt{a})^2=a$. Усвоению этих сведений способствуют упражнения **325—332**.

В пункте 14 рассматривается вопрос о нахождении приближённых значений квадратных корней. На примере $\sqrt{2}$ показывается, как можно найти приближённые значения корня с точностью до 0,1, 0,01, 0,001 и т. п. Эти сведения важны в теоретическом плане. Однако для практических расчётов рассмотренный способ, в силу своей громоздкости, является неприемлемым. Учащиеся знакомятся в данном пункте с нахождением значений квадратных корней с указанной точностью с помощью калькулятора. Практическое применение этого умения показано в упражнениях **345—347**, где предлагается найти приближённые значения корней с указанной точностью, используя геометрические и физические формулы.

Завершает данный параграф пункт 15 «Функция $y=\sqrt{x}$ и её график». Сначала выясняется, какова область определения этой функции, и строится её график. Учащиеся должны знать свойства функции $y=\sqrt{x}$ и понимать, как эти свойства отражаются на графике. Важным шагом является выяснение вопроса о взаимном расположении графиков функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$, где $x \geqslant 0$. Необходимо разъяснить учащимся, что эти графики симметричны относительно прямой $y=x$, и научить их обосновывать этот факт.

В системе упражнений, включённых в пункт 15, отрабатывается умение учащихся находить значения функции, соответствующие заданным значениям аргумента, и значения аргумента, которым соответствуют указанные значения функции. При выполнении упражнений **358—362** анализируется взаимное расположение графика функции $y=\sqrt{x}$ и графиков других функций. Специальное внимание следует уделить упражнению **360**, предназначенному для работы в парах. Желательно обсудить с учащимися, правильно ли приведены ими примеры линейных функций, графики которых не пересекают график функции $y=\sqrt{x}$.

В число дополнительных упражнений к § 5 входят нестандартные задания **466, 473, 475.** В задании **473** учащиеся впервые встречаются с формулой, в которой с использованием знака квадратного корня задаётся расстояние между двумя точками координатной плоскости. В задании **475** предлагается с помощью графиков исследовать вопрос о числе корней уравнений $\sqrt{x}=x+b$ и $\sqrt{x}=x-b$ при различных значениях b. Подобные упражнения способствуют повышению интереса восьмиклассников к курсу алгебры.

Указания к основным упражнениям учебника

308. а) Так как $\sqrt{15{,}21}=3{,}9$, $-\sqrt{16}=-4$ и $|3{,}9|<|-4|$, то точка A ближе к точке с координатой 0, чем точка B;

б) так как $\sqrt{2\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$, $-\sqrt{1\frac{13}{36}}=-\sqrt{\frac{49}{36}}=-\frac{7}{6}$, $\left|-\frac{7}{6}\right|<\left|\frac{5}{3}\right|$,

то точка B ближе к точке с координатой 0, чем точка A.

311—314. Простейшие иррациональные уравнения, рассматриваемые в этих упражнениях, решаются на основании определения арифметического квадратного корня и способствуют его усвоению.

313. (*Для работы в парах.*) Можно сразу сказать, что не являются верными ни при каких значениях x равенства $\sqrt{x}=-20$ и $2+\sqrt{x}=0$, так как значение арифметического квадратного корня не может быть отрицательным числом.

Рассмотрим оставшиеся равенства:

а) $\sqrt{x}=11$; $x=121$; б) $10\sqrt{x}=3$; $\sqrt{x}=0{,}3$; $x=0{,}09$;

г) $2\sqrt{x}-1=0$; $\sqrt{x}=0{,}5$; $x=0{,}25$.

315. Обозначим $\sqrt{n^2+39}$ через m; m, n — натуральные числа. Отсюда $m^2=n^2+39$; $(m-n)(m+n)=39$. Значения выражений $m-n$ и $m+n$ должны быть делителями числа 39, т. е. одним из чисел 1, 3, 13, 39.

Так как $m-n<m+n$, то возможны два варианта:

$$\begin{cases} m-n=1, \\ m+n=39; \end{cases} \qquad \begin{cases} m-n=3, \\ m+n=13. \end{cases}$$

Решив первую систему уравнений, получим $m=20$, $n=19$. Решением второй системы являются однозначные числа. Искомое число $n=19$.

326—327. Следует обратить внимание учащихся на то, что значение $-x$ может быть как отрицательным числом, так и положительным или нулём.

328—332. Это серия упражнений на применение тождества $(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geqslant 0$. Рекомендуется требовать от учащихся пояснения каждого шага решения.

338. Желательно, чтобы найденные приближённые значения корня учащиеся округлили до 0,01.

340. а) Выражение имеет смысл, если подкоренное выражение неотрицательно. Разность $\sqrt{5} - 3$ отрицательна, так как $\sqrt{5} < 3$. Выражение $\sqrt{\sqrt{5} - 3}$ смысла не имеет;

б) выражение $\sqrt{4 - \sqrt{12}}$ имеет смысл, так как $\sqrt{12} < 4$, а значит, $4 - \sqrt{12} > 0$.

346—347. Следует обратить внимание учащихся, что длины s и l выражены в сантиметрах, а ускорение свободного падения — в метрах на секунду в квадрате. Поэтому необходимо выразить длины в метрах.

348. в) $(x - 3)^2 = 12$; $x - 3 = -\sqrt{12}$ или $x - 3 = \sqrt{12}$, отсюда $x_1 = 3 - \sqrt{12}$; $x_2 = 3 + \sqrt{12}$, т. е. $x_1 \approx -0{,}46$; $x_2 \approx 6{,}46$.

352—354. Эти упражнения формируют умение учащихся выражать из формулы одну переменную через другие, пользуясь при необходимости знаком квадратного корня.

353. а) $S = 6a^2$ (у куба 6 граней, имеющих форму квадрата со стороной a); б) $a = \sqrt{\dfrac{S}{6}}$.

360. (*Для работы в парах.*) а) Используя графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x$, находим, что они имеют две общие точки: начало координат и точку (1; 1);

б) графиком функции $y = 1000$ является прямая, параллельная оси x и проходящая через точку (0; 1000). Эта прямая пересечёт график функции $y = \sqrt{x}$ в точке с координатами $x = 1\ 000\ 000$; $y = 1000$;

в) график функции $y = x + 10$ параллелен биссектрисе I и III координатных углов и проходит через точку (0; 10). С увеличением значения x эта прямая удаляется от графика функции $y = \sqrt{x}$, поэтому графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x + 10$ не имеют общих точек;

г) график функции $y = -x + 1{,}5$ параллелен биссектрисе II и IV координатных углов и проходит через точку (0; 1,5). Он пересекает график функции $y = \sqrt{x}$ в точке с координатами $x \approx 0{,}7$; $y \approx 0{,}8$. Графики имеют одну общую точку.

Примером линейной функции, график которой не пересекает график функции $y=\sqrt{x}$, может служить функция $y=-x-2$; пересекает график функции $y=\sqrt{x}$ в одной точке прямая $y=-x+2$; в двух точках график функции $y=\sqrt{x}$ пересекает прямая $y=4x$.

361. График функции $y=\sqrt{x}$ не пересекает график функции $y=-x-0{,}1$, так как эта прямая расположена во II, III и IV координатных четвертях, а график функции $y=\sqrt{x}$ расположен в I координатной четверти.

362. Можно предложить учащимся давать ответы с точностью до 0,1.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

466. $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=2$. По определению арифметического квадратного корня имеем $1+\sqrt{2+\sqrt{x}}=4$. Отсюда $\sqrt{2+\sqrt{x}}=3$; $2+\sqrt{x}=9$; $\sqrt{x}=7$; $x=49$.

Полезно предложить учащимся выполнить проверку, подставив в уравнение найденное значение x.

467. а) Да, например, $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$;

б) да, например, $2\sqrt{3}\cdot 0=0$. Заметим, что в качестве рационального множителя может быть только нуль.

474. д) $\sqrt{\frac{5}{9}}>\sqrt{\frac{6}{11}}$, так как $\frac{5}{9}=\frac{55}{99}$, $\frac{6}{11}=\frac{54}{99}$ и $\frac{55}{99}>\frac{54}{99}$;

з) $3{,}2>\sqrt{9{,}8}$, так как $3{,}2=\sqrt{3{,}2^2}=\sqrt{10{,}24}$ и $10{,}24>9{,}8$;

е) $\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{0{,}(3)}$, так как $\frac{1}{3}=0{,}(3)$.

475. а) При $b>0$ уравнение $\sqrt{x}=x+b$ не имеет корней, при $b=0$ уравнение имеет два корня, при $b<0$ уравнение имеет один корень;

б) при $b<0$ уравнение $\sqrt{x}=-x+b$ не имеет корней, при $b\geqslant 0$ уравнение имеет один корень.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

П у н к т 11

14. д) Выражение $\sqrt{a^2+16a+65}$ имеет смысл при любом значении a, так как $a^2+16a+65=a^2+16a+64+1=(a+8)^2+$ $+1$;

е) выражение $\sqrt{-a^2+2a-1}$ имеет смысл только при $a=1$, так как $-a^2+2a-1=-(a^2-2a+1)=-(a-1)^2$.

15. Преобразуем подкоренное выражение:

$n^2(n^2+14)-2(n^2-18)=n^4+14n^2-2n^2+36=n^4+12n^2+$ $+36=(n^2+6)^2$.

Отсюда $\sqrt{n^2(n^2+14)-2(n^2-18)}=\sqrt{(n^2+6)^2}=n^2+6$. Следовательно, значение выражения при любом натуральном n является натуральным числом.

Пункт 12

13. Подставив в уравнение $x^2=b^2+32$ значение $x=5{,}7$, получим $32{,}49=b^2+32$; $b^2=0{,}49$; $b_1=-0{,}7$; $b_2=0{,}7$.

15. Подставив в уравнение $x^2=a^2+b^2$ значения $a=2mn$, $b=m^2-n^2$, где m, n — целые числа, получим

$$x^2=(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4=$$
$$=m^4+2m^2n^2+n^4=(m^2+n^2)^2.$$

Отсюда $x_1=-(m^2+n^2)$; $x_2=m^2+n^2$; $-(m^2+n^2)$ и m^2+n^2 — целые числа.

Пункт 13

10. Так как $s=\frac{at^2}{2}$, то $t=\sqrt{\frac{2s}{a}}$.

Если $s=1720$, $a=6$, то $t=\sqrt{\frac{2\cdot1720}{6}}\approx23{,}9$ (с).

13. а) Если $R=6{,}8$, то $a_5=3{,}4\sqrt{10-\sqrt{20}}\approx8{,}0$.

Пункт 14

7. Прямые $x=8$; $x=0$; $x=100$ пересекают график функции $y=\sqrt{x}$, а прямая $x=-4$ нет, так как она расположена во II и III координатных четвертях, а график функции $y=\sqrt{x}$ расположен в I координатной четверти.

12. Предположим, что прямая $y=x+0{,}5$ пересекает график функции $y=\sqrt{x}$. Тогда $x+0{,}5=\sqrt{x}$. Возведём в квадрат обе части равенства. Получим

$$(x+0{,}5)^2=(\sqrt{x})^2;\ x^2+x+0{,}25=x;\ x^2+25=0.$$

Это равенство не выполняется ни при каком значении x, следовательно, сделанное предположение неверно.

15. В верхнем ряду изображены графики функций $y=\sqrt{x}+2$ и $y=\sqrt{|x|}$, а в нижнем ряду — графики функций $y=\sqrt{-x}$ и $y=-\sqrt{x}$.

§ 6. Свойства арифметического квадратного корня

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
16	Квадратный корень из произведения и дроби	3 (4)
17	Квадратный корень из степени	
	Контрольная работа № 3	1

Содержание материала

В данном параграфе учащиеся знакомятся с основными свойствами арифметических квадратных корней и применением этих свойств в вычислениях и преобразованиях. Доказываются теоремы о квадратном корне из произведения и дроби и предлагаются различные упражнения, в которых эти теоремы находят применение. Учащиеся узнают, что из этих теорем следуют важные тождества $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, и выполняют упражнения, в которых эти тождества используются. Доказывается теорема о справедливости равенства $\sqrt{x^2} = |x|$ и формируется умение учащихся выполнять извлечение корней из степеней с чётными показателями.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы ознакомить учащихся с теоремами, выражающими важные свойства квадратных корней, и сформировать умения применять эти свойства в вычислениях значений выражений, содержащих квадратные корни, и в преобразованиях таких выражений.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны уметь доказывать теоремы о корне из произведения и дроби и применять их при нахождении значений выражений вида $\sqrt{ab}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Они также должны уметь представлять произведение корней и частное корней в виде корня. При изучении сведений о квадратном корне из степени формируется умение учащихся применять равенство $\sqrt{x^2}=|x|$ при извлечении квадратных корней из степеней с чётными показателями.

Методический комментарий

В данном параграфе делаются новые шаги в формировании алгоритмической культуры учащихся. В пункте 16 «Квадратный корень из произведения и дроби» учащиеся знакомятся с теоремами 1 и 2, из которых узнают, что верны равенства $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ при $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a\geqslant 0$, $b>0$. Эти сведения являются опорными при выполнении упражнений **369—384**. Желательно, чтобы учащиеся помнили значения квадратов двузначных чисел от 10 до 20, умели находить значения некоторых корней с помощью таблицы квадратов натуральных чисел от 10 до 99, помещённой в учебнике. В системе упражнений специальное внимание следует уделить усложнённому заданию **381**, выполнение которого связано с нестандартными рассуждениями.

Далее учащиеся узнают, что из теорем о квадратном корне из произведения и дроби следуют тождества $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$, и приступают к выполнению заданий **385—388**, в которых эти тождества находят применение. Полезно остановиться на упражнении **388**, в ходе выполнения которого учащиеся убеждаются, что при вычислении значения выражения $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ с помощью калькулятора целесообразно заменить его тождественно равным выражением $\sqrt{6}$.

Изучение пункта 17 «Квадратный корень из степени» начинается с доказательства теоремы о справедливости равенства $\sqrt{x^2}=|x|$ при любом значении x. Полезно порекомендовать учащимся записать в тетрадях вытекающий из этой теоремы вывод: для того чтобы извлечь корень из степени с чётным показателем, достаточно представить подкоренное выражение в виде квадрата некоторого выражения и воспользоваться тождеством $\sqrt{x^2}=|x|$. Этот вывод поможет учащимся при выполнении заданий **393—397**, а также предназначенного для работы в парах задания **398**. Важно остановиться на заданиях **399** и **400**, в которых учащиеся встречаются с двойными радикалами, и на заданиях **401—404**, где сведения о корне из степени применяются в сочетании с изученными теоремами о корне из произведения и дроби.

Из дополнительных упражнений полезно предложить учащимся выполнить задание **479**, позволяющее проверить усвоение изученного материала, а также задание **485**, связанное с построением графиков функций. Учащимся, интересующимся математикой, можно порекомендовать выполнить усложнённое задание **486**. Интерес учащихся, безусловно, вызовет упражнение **488**, где в задаче-исследовании предлагается найти такой способ преобразования подкоренного выражения, который позволит получить ответ на вопрос задачи.

Указания к основным упражнениям учебника

В заданиях **374—375** следует предварительно преобразовать подкоренное выражение так, чтобы множители представляли собой квадраты чисел.

375. а) $\sqrt{75 \cdot 48} = \sqrt{25 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 16} = \sqrt{5^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$;

в) $\sqrt{4{,}9 \cdot 360} = \sqrt{49 \cdot 36} = \sqrt{7^2 \cdot 6^2} = 7 \cdot 6 = 42$.

376—377. В заданиях «а», «в»—«е» следует применить формулу разности квадратов.

381. Обозначим $\sqrt{n^2 - 75}$ через m; m, n — натуральные числа. Имеем

$$\sqrt{n^2 - 75} = m;\ \ n^2 - 75 = m^2;$$

$$n^2 - m^2 = 75;\ (n - m)(n + m) = 75.$$

Значения чисел $n - m$ и $n + m$ должны быть делителями числа 75, т. е. одним из чисел: 1, 3, 5, 15, 25, 75.

Так как $n - m < n + m$, возможны три варианта:

$$\begin{cases} n - m = 1, \\ n + m = 75; \end{cases} \qquad \begin{cases} n - m = 3, \\ n + m = 25; \end{cases} \qquad \begin{cases} n - m = 5, \\ n + m = 15. \end{cases}$$

Решив эти системы, получим три возможных значения числа n: 38, 14 и 10.

382. б) $\sqrt{750\,000} = \sqrt{75 \cdot 10\,000} = \sqrt{75} \cdot \sqrt{10\,000} \approx 8{,}7 \cdot 100$, т. е. $\sqrt{750\,000} \approx 870$;

г) $\sqrt{0{,}0075} = \sqrt{75 \cdot 0{,}0001} = \sqrt{75} \cdot \sqrt{0{,}0001} \approx 8{,}7 \cdot 0{,}01$, т. е. $\sqrt{0{,}0075} \approx 0{,}087$.

396. г) $-5\sqrt{y^2} = -5 \cdot |y|$. Так как $y > 0$, то $|y| = y$ и $-5|y| = -5y$;

е) $-\sqrt{9y^2} = -3|y|$. Так как $y < 0$, то $|y| = -y$ и $-3|y| = 3y$.

397. Преобразуем подкоренное выражение, воспользовавшись формулой квадрата разности: $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = \sqrt{(a-2)^2} = |a-2|$.

а) Если $0 \leqslant a < 2$, то $|a-2| = 2-a$;
б) если $a \geqslant 2$, то $|a-2| = a-2$.

398. (*Для работы в парах*.) Можно упростить подкоренное выражение, применив формулу квадрата разности:

$$9 - 6\sqrt{x} + x = (3-\sqrt{x})^2.$$

Тогда $\sqrt{9-6\sqrt{x}+x} = \sqrt{(3-\sqrt{x})^2} = |3-\sqrt{x}|$.

а) Если $x = 2{,}71$, то $|3-\sqrt{x}| = 3-\sqrt{2{,}71} \approx 1{,}35$;

б) если $x = 12{,}62$, то $|3-\sqrt{x}| = \sqrt{12{,}62} - 3 \approx 0{,}55$.

400. а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{4+4\sqrt{3}+3} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}+1} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1$.

403. в) $\sqrt{28\,224} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

485. а) Выражение $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ имеет смысл при любых значениях $x \neq 0$. Если $x > 0$, то $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \dfrac{|x|}{x} = 1$, т. е. $y = 1$, если $x < 0$, то $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$, т. е. $y = -1$. График изображён на рисунке 2;

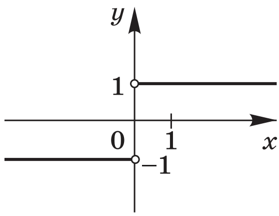


Рис. 2

б) выражение $\dfrac{-2\sqrt{x^2}}{x}$ имеет смысл при всех $x \neq 0$. Если $x > 0$, то $\dfrac{-2\sqrt{x^2}}{x} = \dfrac{-2|x|}{x} = -2$, т. е. $y = -2$, если $x < 0$, то $\dfrac{-2\sqrt{x^2}}{x} = \dfrac{-2|x|}{x} = \dfrac{-2(-x)}{x} = 2$, т. е. $y = 2$. График изображён на рисунке 3;

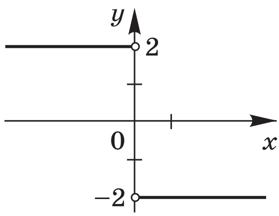


Рис. 3

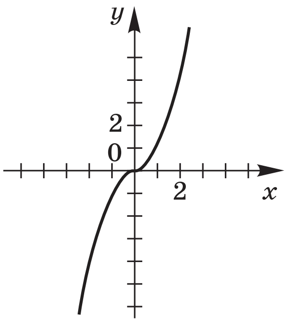


Рис. 4

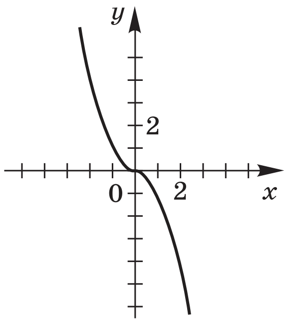


Рис. 5

в) если $x \geqslant 0$, то $x\sqrt{x^2} = x|x| = x^2$, т. е. $y = x^2$, если $x < 0$, то $x\sqrt{x} = x|x| = x \cdot (-x) = -x^2$, т. е. $y = -x^2$. График изображён на рисунке 4;

г) если $x \geqslant 0$, то $-x\sqrt{x^2} = -x \cdot x = -x^2$, т. е. $y = -x^2$, если $x < 0$, то $-x\sqrt{x^2} = (-x)(-x) = x^2$, т. е. $y = x^2$. График изображён на рисунке 5.

Легко заметить, что графики в заданиях «в» и «г» симметричны относительно оси x, поэтому график функции $y = -x\sqrt{x^2}$ можно получить, отобразив от оси x график функции $y = x\sqrt{x^2}$.

488. (*Задача-исследование.*) 1) Пусть $n = 3$, тогда

$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} = \sqrt{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1} = \sqrt{361} = 19.$$

2) Удобно в подкоренном выражении сгруппировать первый множитель с четвёртым, а второй с третьим. Тогда

$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} = \sqrt{(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1} =$$

$$= \sqrt{(n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)+1} = \sqrt{(n^2+3n+1)^2} = n^2+3n+1.$$

При натуральном n значение выражения $n^2 + 3n + 1$ является натуральным числом.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 15

11. в) Возможны различные способы представления выражения $\sqrt{11abc}$, где $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$, в виде произведения двух корней. Например, $\sqrt{11abc} = \sqrt{11ab} \cdot \sqrt{c}$ или $\sqrt{11abc} = \sqrt{-11a} \cdot \sqrt{-bc}$.

12. б) Выражение $\sqrt{\frac{17mn}{p}}$, где $m<0$, $n<0$, $p>0$, можно представить в виде частного от деления двух корней различными способами. Например, $\sqrt{\frac{17mn}{p}}=\frac{\sqrt{17mn}}{\sqrt{p}}$ или $\sqrt{\frac{17mn}{p}}=\frac{\sqrt{17\cdot(-m)\cdot(-n)}}{\sqrt{p}}$.

Пункт 16

11. в) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2+1-2\sqrt{2}}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=$
$=\sqrt{2}-1;$

г) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\sqrt{7-4\sqrt{7}+4}=$
$=\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}=|\sqrt{7}-2|=\sqrt{7}-2.$

13. Если $x>0$, то $\frac{x^3}{x^2}=x$, т. е. $y=x$; если $x<0$, то $\frac{-x^3}{x^2}=-x$, т. е. $y=-x$. Следует обратить внимание, что при $x=0$ функция не определена. График функции изображён на рисунке 6.

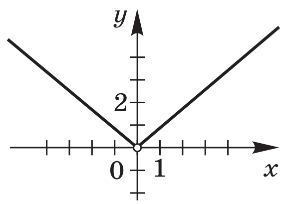


Рис. 6

§ 7. Применение свойств арифметического квадратного корня

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
18	Вынесение множителя за знак корня. Внесение множителя под знак корня	3 (5)
19	Преобразование выражений, содержащих квадратные корни	4 (5)
	Контрольная работа № 4	1

Содержание материала

В данном параграфе дополняются известные учащимся сведения о приёмах преобразования выражений, содержащих квадратные корни. Учащиеся знакомятся с такими преобразованиями, как вынесение множителя за знак корня и внесение множителя под знак корня. В авторских примерах внимание акцентируется на случаях, когда выносится за знак корня или вносится под знак корня буквенный множитель. Ещё одним важным видом преобразований, которые рассматриваются в данном параграфе, является освобождение от иррациональности в знаменателе дроби. Показано, в частности, применение этого преобразования при нахождении значений некоторых дробей с помощью калькулятора.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы научить восьмиклассников выполнять такие преобразования, как вынесение множителя за знак корня и внесение множителя под знак корня, а также освобождение от иррациональности в знаменателях дробей вида $\frac{a}{\sqrt{b}}$, $\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного параграфа учащиеся делают новые шаги в овладении умением выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни. Формируются такие умения, как вынесение множителя за знак корня и внесение множителя под знак корня. Важно, чтобы учащиеся понимали, что подобные преобразования основаны на теоремах о корне из произведения и дроби и следствиях из этих теорем. Учащиеся должны уметь выполнять такое преобразование, как освобождение от иррациональности в знаменателе дроби, и применять это преобразование при выполнении вычислений с помощью калькулятора.

Методический комментарий

Изучение пункта 18 «Вынесение множителя за знак корня. Внесение множителя под знак корня» рекомендуется начать с задачи сравнения значений выражений $\sqrt{50}$ и $6\sqrt{2}$. Желательно, чтобы учащиеся сами предложили способы решения этой задачи: представить $\sqrt{50}$ в виде $5\sqrt{2}$ или представить выражение $6\sqrt{2}$ в виде $\sqrt{72}$, воспользовавшись изученными сведениями о действиях с корнями. Важно подчеркнуть, что эти способы основаны на доказанных ранее соотношениях $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Учащиеся знакомятся с названиями выполненных преобразований: вынесение множителя за знак корня и внесение множителя под знак корня. Далее можно рассмотреть примеры 1 и 2 учебного текста и перейти к выполнению включённых в данный пункт упражнений. Что касается примера 3, то его рекомендуется рассмотреть после того, как будут выполнены упражнения **407—416**. Завершить изучение пункта 18 следует выполнением упражнений **417** и **418**. При решении задачи-исследования, представленной в упражнении **417**, важно организовать коллективную работу учащихся и проверку сделанных ими выводов. Упражнение **418**, предлагаемое для работы в парах, позволяет познакомить учащихся с интересной формулой, применяемой для вычисления площади треугольника.

В пункте 19 «Преобразование выражений, содержащих квадратные корни» изученные ранее преобразования корней применяются в усложнённых ситуациях. После рассмотрения авторских примеров 1 и 2 можно предложить учащимся выполнить упражнения **421—430**, распределив их между классной и домашней работой. Далее рекомендуется остановиться на примерах 3 и 4 учебного текста, где представлен новый вид преобразований — освобождение от иррациональности в знаменателе дроби. Усвоению этого преобразования способствуют упражнения **431—436**, которые следует использовать для классной и домашней работы. После этого учащиеся могут выполнить упражнения **437—439**, а также некоторые задания из раздела «Дополнительные упражнения к главе II». Хорошо успевающим учащимся можно предложить выполнить усложнённые задания **508**, **511** с последующим обсуждением в классе найденных способов решения.

Указания к основным упражнениям учебника

411. Выражение, содержащее арифметический квадратный корень, не имеет смысла, если подкоренное выражение отрицательно. Определим знаки подкоренных выражений:

$$2\sqrt{17}-4=2\sqrt{17}-\sqrt{16}>0;\ \ 2\sqrt{2}-\sqrt{7}=\sqrt{8}-\sqrt{7}>0;$$

$$6\sqrt{3}-7\sqrt{2}=\sqrt{36\cdot 3}-\sqrt{49\cdot 2}=\sqrt{108}-\sqrt{98}>0;$$

$$8\sqrt{3}-14=\sqrt{64\cdot 3}-\sqrt{14^2}=\sqrt{192}-\sqrt{196}<0.$$

Итак, не имеет смысла выражение под номером 4.

413. Используя внесение множителя под знак корня, получаем:

г) $-6\sqrt{2a}=-\sqrt{36\cdot 2a}=-\sqrt{72a}$;

д) $\frac{1}{3}\sqrt{18b}=\sqrt{\frac{1}{9}\cdot 18b}=\sqrt{2b}$.

414. В заданиях «а» и «б» можно сравнить значения выражений двумя способами: либо с помощью вынесения множителя за знак корня, либо с помощью внесения множителя под знак корня.

б) $\sqrt{20} < 3\sqrt{5}$, так как $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5} < 3\sqrt{5}$,

или $\sqrt{20} < 3\sqrt{5}$, так как $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ и $\sqrt{20} < \sqrt{45}$.

416. б) Для выполнения этого задания внесём множители под знак корня:

$$6\sqrt{2} = \sqrt{72};\ 3\sqrt{7} = \sqrt{63};\ 2\sqrt{14} = \sqrt{56};\ 5\sqrt{3} = \sqrt{75};$$

$$\sqrt{56} < \sqrt{58} < \sqrt{63} < \sqrt{72} < \sqrt{75},$$

следовательно, $2\sqrt{14} < \sqrt{58} < 3\sqrt{7} < 6\sqrt{2} < 5\sqrt{3}$.

417. (*Задача-исследование.*) Убедиться в правильности приведённых равенств можно, внеся множители под знак корня в выражениях, стоящих в правых частях равенств:

$$2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2^2 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{2\frac{2}{3}};\ \ 3\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{3^2 \cdot \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{27}{8}} = \sqrt{3\frac{3}{8}};$$

$$4\sqrt{\frac{4}{15}} = \sqrt{4^2 \cdot \frac{4}{15}} = \sqrt{\frac{64}{15}} = \sqrt{4\frac{4}{15}}.$$

1) Возведём в квадрат обе части равенства $\sqrt{a + \frac{a}{b}} = a\sqrt{\frac{a}{b}}$, где $a \in \boldsymbol{N}$, $b \in \boldsymbol{N}$: $a + \frac{a}{b} = a^2 \cdot \frac{a}{b}$, отсюда $ab + a = a^3$; $a(b+1) = a^3$; $a^2 = b + 1$.

2) Искомое соотношение между значениями a и b, при котором верно данное равенство, имеет вид $a^2 = b + 1$.

3) Возьмём, например, значения $a = 5$ и $b = 24$. Тогда

$$\sqrt{a + \frac{a}{b}} = \sqrt{5 + \frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{125}{24}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}};\ \ a\sqrt{\frac{a}{b}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}.$$

418. (*Для работы в парах.*) Эта задача интересна тем, что расширяет круг известных учащимся формул для определения площади треугольника. Формула Герона позволяет определить площадь треугольника по трём его сторонам.

а) $p = \dfrac{12 + 16 + 24}{2} = 26$ (см);

$$S = \sqrt{26 \cdot 14 \cdot 10 \cdot 2} = \sqrt{2^4 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 5} = 4\sqrt{13 \cdot 7 \cdot 5} \approx 85 \text{ (см}^2\text{)};$$

б) $p = \dfrac{18 + 22 + 26}{2} = 33$ (см);

$$S = \sqrt{33 \cdot 15 \cdot 11 \cdot 7} = \sqrt{11^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = 33\sqrt{35} \approx 195 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Можно предположить, что если каждую из сторон треугольника увеличить в 2 раза, то его площадь увеличится в 4 раза. Докажем это.

Пусть $a_1 = 2a$, $b_1 = 2b$, $c_1 = 2c$, где a_1, b_1 и c_1 — стороны нового треугольника. Тогда его полупериметр равен

$$p_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{2} = \frac{2a + 2b + 2c}{2} = a + b + c = 2p.$$

Площадь нового треугольника равна

$$S_1 = \sqrt{p_1(p_1 - a_1)(p_1 - b_1)(p_1 - c_1)} =$$
$$= \sqrt{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)} =$$
$$= 4\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = 4S.$$

427. д) По условию $y \geqslant 0$, следовательно, можно представить y как $(\sqrt{y})^2$. Тогда

$$y - 3 = (\sqrt{y})^2 - (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{y} - \sqrt{3})(\sqrt{y} + \sqrt{3});$$

е) так как $x > 0$ и $y > 0$, то $x = (\sqrt{x})^2$, $y = (\sqrt{y})^2$. Тогда

$$x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

428. д) Выражение $\sqrt{a} - \sqrt{2a}$ имеет смысл при $a \geqslant 0$. Применив теорему о корне из произведения, получим

$$\sqrt{a} - \sqrt{2a} = \sqrt{a} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}(1 - \sqrt{2});$$

е) выражения $\sqrt{3m}$ и $\sqrt{5m}$ имеют смысл при $m \geqslant 0$. Тогда $\sqrt{3m} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{m}$, $\sqrt{5m} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{m}$. Получим

$$\sqrt{3m} + \sqrt{5m} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{m} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{m} = \sqrt{m}(\sqrt{3} + \sqrt{5}).$$

433. Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, позволяющее применить в знаменателе формулу разности квадратов:

д) $\dfrac{33}{7 - 3\sqrt{3}} = \dfrac{33(7 + 3\sqrt{3})}{(7 - 3\sqrt{3})(7 + 3\sqrt{3})} = \dfrac{33(7 + 3\sqrt{3})}{49 - 27} = \dfrac{3(7 + 3\sqrt{3})}{2}.$

434. Преобразуем выражение:

а) $\dfrac{1}{3\sqrt{3} - 4} - \dfrac{1}{3\sqrt{3} + 4} = \dfrac{3\sqrt{3} + 4 - 3\sqrt{3} + 4}{(3\sqrt{3} - 4)(3\sqrt{3} + 4)} = \dfrac{8}{(3\sqrt{3})^2 - 4^2} =$

$= \dfrac{8}{27 - 16} = \dfrac{8}{11}$; $\dfrac{8}{11}$ — рациональное число;

б) $\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}} - \dfrac{1}{5+2\sqrt{6}} = \dfrac{5+2\sqrt{6}-5+2\sqrt{6}}{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})} = \dfrac{4\sqrt{6}}{25-24} = 4\sqrt{6}$;
$4\sqrt{6}$ — число иррациональное.

435. Прежде чем воспользоваться калькулятором, следует освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

б) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}+\sqrt{3} \approx 3{,}97$.

437. а) Преобразуем левую часть равенства:

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3\cdot 5}{5\cdot 5}} = \frac{1}{5}\sqrt{15} = 0{,}2\sqrt{15}.$$

Можно доказать, что равенство верно, воспользовавшись определением арифметического квадратного корня. Число $0{,}2\sqrt{15}$ положительное, возведём его в квадрат: $(0{,}2\sqrt{15})^2 = 0{,}04\cdot 15 = 0{,}6 = \dfrac{3}{5}$.

438. Следует напомнить учащимся, что взаимно обратными называются числа, произведение которых равно единице, а противоположными — числа, сумма которых равна нулю.

Вычислим произведение и сумму данных чисел:

$$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 4-3 = 1,$$

т. е. числа $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$ взаимно обратные;

$$2\sqrt{6}-5+\frac{1}{2\sqrt{6}+5} = 2\sqrt{6}-5+\frac{2\sqrt{6}-5}{(2\sqrt{6}+5)(2\sqrt{6}-5)} =$$

$$= 2\sqrt{6}-5+\frac{2\sqrt{6}-5}{-1} = 2\sqrt{6}-5-2\sqrt{6}+5 = 0,$$

т. е. числа $2\sqrt{6}-5$ и $\dfrac{1}{2\sqrt{6}+5}$ противоположные.

439. Числа $15\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{675}-\sqrt{32}}$ являются взаимно обратными, так как

$$(15\sqrt{3}-4\sqrt{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{675}-\sqrt{32}} = \frac{15\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{15\sqrt{3}-4\sqrt{2}} = 1;$$

числа $\sqrt{80}-5\sqrt{3}$ и $\sqrt{75}-4\sqrt{5}$ являются противоположными, так как

$$(\sqrt{80}-5\sqrt{3})+(\sqrt{75}-4\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}-5\sqrt{3}+5\sqrt{3}-4\sqrt{5} = 0.$$

Указания к дополнительным упражнениям учебника

492. Для сравнения выражений используем внесение множителя под знак корня:

б) $5\sqrt{\frac{7}{2}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 7}{2}} = \sqrt{87\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{62} = \sqrt{\frac{62}{4}} = \sqrt{15\frac{1}{2}}$;

$\sqrt{15\frac{1}{2}} < \sqrt{17} < \sqrt{87\frac{1}{2}}$, значит, $\frac{1}{2}\sqrt{62} < \sqrt{17} < 5\sqrt{\frac{7}{2}}$.

494. Применим формулы разности и суммы кубов:

в) $(\sqrt{m} - \sqrt{n})(m + n + \sqrt{mn}) = (\sqrt{m})^3 - (\sqrt{n})^3 = m\sqrt{m} - n\sqrt{n}$;

г) $(x + \sqrt{y})(x^2 + y - x\sqrt{y}) = x^3 + (\sqrt{y})^3 = x^3 + y\sqrt{y}$.

495. а) Чтобы применить формулу квадрата разности, представим число 3 как $4 - 1$:

$$x - 4\sqrt{x-1} + 3 = x - 4\sqrt{x-1} + 4 - 1 = (x-1) - 4\sqrt{x-1} + 4 =$$
$$= (\sqrt{x-1} - 2)^2.$$

497. в) Для упрощения вычислений предварительно разложим данный многочлен на множители:

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 3x - x + 3 = x(x-3) - (x-3) = (x-3)(x-1).$$

Если $x = 2 + \sqrt{3}$, то

$$(x-3)(x-1) = (2 + \sqrt{3} - 3)(2 + \sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) =$$
$$= 3 - 1 = 2;$$

г) для упрощения вычислений представим исходное выражение как $x(x-3) + 5$.

Если $x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$, то

$$x(x-3) + 5 = \frac{3+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2} - 3\right) + 5 = \frac{3+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}-3}{2} + 5 =$$
$$= \frac{2-9}{4} + 5 = 3\frac{1}{4}.$$

498. $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 4 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{3 + 4 - 4\sqrt{3}} =$

$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2 + \sqrt{3}| + |2 - \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4;$

$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{49 - 48} = 1.$

500. г) $\dfrac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}}+\dfrac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}=\dfrac{(11+\sqrt{21})^2+(11-\sqrt{21})^2}{(11-\sqrt{21})(11+\sqrt{21})}=$

$=\dfrac{121+22\sqrt{21}+21+121-22\sqrt{21}+21}{121-21}=\dfrac{284}{100}=2{,}84.$

503. д) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}(2+\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\sqrt{3};$

е) $\dfrac{(\sqrt{10}-1)^2-3}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{10}-1-\sqrt{3})(\sqrt{10}-1+\sqrt{3})}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}=\sqrt{10}-1-\sqrt{3}.$

505. в) $\dfrac{1-2\sqrt{x}+4x}{1-2\sqrt{x}}=\dfrac{(1-2\sqrt{x}+4x)(1+2\sqrt{x})}{(1-2\sqrt{x})(1+2\sqrt{x})}=\dfrac{1+8x\sqrt{x}}{1-4x}.$

506. в) Умножим числитель и знаменатель дроби на $7+\sqrt{a}$ и применим формулы разности квадратов и суммы кубов:

$$\frac{7-\sqrt{a}}{49-7\sqrt{a}+a}=\frac{(7-\sqrt{a})(7+\sqrt{a})}{(49-7\sqrt{a}+a)(7+\sqrt{a})}=\frac{49-a}{343+a\sqrt{a}}.$$

507. а) Для освобождения от иррациональности в знаменателе дроби требуется два этапа. Сначала умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2}+\sqrt{3}-1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-1}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2+3+2\sqrt{6}-1}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}.$$

Теперь умножим числитель и знаменатель дроби на $4-2\sqrt{6}$:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)(4-2\sqrt{6})}{(4+2\sqrt{6})(4-2\sqrt{6})}=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{3}-4-2\sqrt{12}-2\sqrt{18}+2\sqrt{6}}{16-24}=$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{6}-4}{-8}=\frac{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

508. Выражение $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ имеет смысл при $x\geqslant 0$ и $x\neq 2$. Так как $x\neq 2$, то

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}.$$

Наибольшее значение эта дробь принимает при наименьшем значении знаменателя, т. е. при $x=0$.

510. б) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{(b-a)^2}{2}=\dfrac{a+\sqrt{ab}-a+\sqrt{ab}}{a-b}\times$

$\times\dfrac{(b-a)^2}{2}=\dfrac{2\sqrt{ab}\,(a-b)^2}{2(a-b)}=\sqrt{ab}\,(a-b).$

511. $\sqrt{b+49-14\sqrt{b}}+\sqrt{b+49+14\sqrt{b}}=\sqrt{(7-\sqrt{b})^2}+$

$+\sqrt{(7+\sqrt{b})^2}=|7-\sqrt{b}|+|7+\sqrt{b}|.$

Так как $0\leqslant b\leqslant 49$, то $0\leqslant\sqrt{b}\leqslant 7$, следовательно, $|7-\sqrt{b}|=7-\sqrt{b}$ и $|7-\sqrt{b}|+|7+\sqrt{b}|=7-\sqrt{b}+7+\sqrt{b}=14$, значит, исходное выражение не зависит от b.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 17

9. Упростим предварительно каждое из данных выражений, вынеся множитель за знак корня.

$$-\frac{1}{7}\sqrt{98}=-\frac{1}{7}\sqrt{49\cdot 2}=-\sqrt{2};\ \frac{1}{9}\sqrt{243}=\frac{1}{9}\sqrt{81\cdot 3}=\sqrt{3};$$

$$-\frac{1}{8}\sqrt{448}=-\frac{1}{8}\sqrt{64\cdot 7}=-\sqrt{7};\ 0{,}1\sqrt{1000}=0{,}1\cdot 10\sqrt{10}=\sqrt{10}.$$

Для преобразования выражения $-\frac{2}{5}\sqrt{54}$ внесём множитель под знак корня:

$$-\frac{2}{5}\sqrt{54}=-\sqrt{\frac{4\cdot 54}{25}}=-\sqrt{\frac{216}{25}}=-\sqrt{8{,}64}.$$

Имеем $-\sqrt{8{,}64}<-\sqrt{7}<-\sqrt{2}<\sqrt{3}<\sqrt{10}$, следовательно,

$$-\frac{2}{5}\sqrt{54}<-\frac{1}{8}\sqrt{448}<-\frac{1}{7}\sqrt{98}<\frac{1}{9}\sqrt{243}<0{,}1\sqrt{1000}.$$

11. в) Если $a\geqslant 0$ и $2m+3\geqslant 0$, где m — натуральное число, то $\sqrt{a^{2m+3}}=\sqrt{a^{2m+2}\cdot a}=a^{m+1}\sqrt{a}$;

г) если $b\leqslant 4$, то $\sqrt{(4-b)^5}=\sqrt{(4-b)^4\,(4-b)}=(4-b)^2\sqrt{4-b}$.

12. а) $4a\sqrt{a^5}=4a\cdot\sqrt{a^4\cdot a}=4a\cdot a^2\sqrt{a}=4a^3\sqrt{a}$;

$$2a\sqrt{4a^7}=2a\sqrt{4a^6\cdot a}=2a\cdot 2a^3\sqrt{a}=4a^4\sqrt{a}.$$

Так как $a>1$, то $4a^3\sqrt{a}<4a^4\sqrt{a}$, следовательно, $4a\sqrt{a^5}<$ $<2a\sqrt{4a^7}$.

13. а) $a^3\sqrt{a^3}=a^3\sqrt{a^2\cdot a}=a^4\sqrt{a}$; $\sqrt{a^{10}}=a^5$.

Сравним квадраты этих выражений: $(a^4\sqrt{a})^2=a^9$. Так как $a>1$, то $a^9<a^{10}$, следовательно, $a^3\sqrt{a^3}<\sqrt{a^{10}}$;

б) $y^4\sqrt{y^{16}}>y^{15}$, так как если $y<-6$, то y^{15} — отрицательное число, а $y^4\sqrt{y^{16}}\geqslant 0$ при любом значении y.

Пункт 18

10. а) $\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{3}}{5b-15}=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{3}}{5(b-3)}=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{3}}{5(\sqrt{b}-\sqrt{3})(\sqrt{b}+\sqrt{3})}=\dfrac{1}{5(\sqrt{b}+\sqrt{3})}$.

Наибольшее значение эта дробь принимает при $b=0$. Это значение равно $\dfrac{1}{5\sqrt{3}}$, т. е. $\dfrac{\sqrt{3}}{15}$.

12. а) $5-b+\sqrt{4b+\sqrt{b^4+16+8b^2}}=5-b+\sqrt{4b+\sqrt{(b^2+4)^2}}=$
$=5-b+\sqrt{4b+b^2+4}=5-b+|b+2|$.

Так как $b>-2$, то $|b+2|=b+2$. Тогда $5-b+|b+2|=5-b+$ $+b+2=7$, т. е. не зависит от b;

б) $p-1-\sqrt{6p+\sqrt{p^4+18p^2+81}}=p-1-\sqrt{6p+\sqrt{(p^2+9)^2}}=$
$=p-1-\sqrt{6p+p^2+9}=p-1-|p+3|$.

Так как $p>-3$, то $|p+3|=p+3$. Тогда $p-1-|p+3|=p-$ $-1-p-3=-4$, т. е. не зависит от p.

13. Преобразуем данный многочлен:
$4x^3-8x^2+2x+3=4x^3-4x^2-4x^2+4x-2x+2+1=4x^2\times$ $\times(x-1)-4x(x-1)-2(x-1)+1=(x-1)(4x^2-4x-2)+1$.

Если $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, то $x-1=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$;

$$4x^2-4x-2=4x(x-1)-2=4\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}-2=0.$$

Тогда $(x-1)(4x^2-4x-2)+1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot 0+1=1$.

14. Так как $\sqrt{2}<1{,}42$, то $57-40\sqrt{2}>57-56{,}8>0$. Следовательно, выражение $\sqrt{57-40\sqrt{2}}+\sqrt{57+40\sqrt{2}}$ имеет смысл.

Найдём квадрат данного выражения:

$(\sqrt{57-40\sqrt{2}}+\sqrt{57+40\sqrt{2}})^2=57-40\sqrt{2}+57+40\sqrt{2}+$
$+2\sqrt{57^2-40^2\cdot 2}=114+2\sqrt{3249-3200}=114+14=128$.

Так как $\sqrt{57-40\sqrt{2}}+\sqrt{57+40\sqrt{2}}>0$, то это выражение равно $\sqrt{128}$, т. е. $8\sqrt{2}$.

Пункт 20. Преобразование двойных радикалов

Методический комментарий

В соответствии с принятым в учебнике подходом к структурированию учебного материала глава II «Квадратные корни» завершается дополнительным пунктом «Преобразование двойных радикалов», предназначенным для учащихся, интересующихся математикой. В этом пункте вводится понятие двойного радикала как выражения вида $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$, где a, b, c — некоторые рациональные числа. Полезно сообщить учащимся, что с помощью двойных радикалов выражаются длины сторон a_5 и a_{12} правильных пятиугольника и двенадцатиугольника, вписанных в круг радиуса R:

$$a_5=\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}},\ a_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

В пункте 20 рассматриваются способы освобождения от внешнего радикала в двойном радикале. В примере 1 учебного текста представлен наиболее простой случай, когда выражение, стоящее в двойном радикале под знаком внешнего радикала, представляет собой полный квадрат. В примере 2 показано, как можно освободиться в двойном радикале от внешнего радикала, используя метод неопределённых коэффициентов. Методическая ценность примера 2 состоит в том, что здесь учащиеся ещё раз убеждаются в общности этого метода.

Ещё один способ освобождения от внешнего радикала связан с использованием формулы двойного радикала:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Следует обратить внимание учащихся на то, что освободиться от внешнего радикала с помощью формулы двойного радикала можно в тех случаях, когда $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ и разность a^2-b равна квадрату рационального числа. Такой случай представлен в примере 3 учебного текста.

Приведённый в данном пункте пример 4 позволяет познакомить учащихся со случаем, когда освобождение в двойном радикале от внешнего радикала используется в преобразовании выражения с переменными.

Изучение данного пункта рекомендуется провести в виде занятия математического кружка. К этому занятию можно поручить двум учащимся подготовить сообщения о приёмах преобразования двойных радикалов. Один из них может познакомить одноклассников с разобранными в пункте 20 примерами 1 и 2, а другой — рассказать им о формуле двойного радикала и способах преобразований выражений, использованных в примерах 3 и 4. После этого учащиеся под руководством учителя могут приступить к выполнению некоторых упражнений, включённых в пункт 20.

Указания к упражнениям учебника

444. б) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\sqrt{7-4\sqrt{7}+4}=\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}=\sqrt{7}-2.$

445. а) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\sqrt{9+6\sqrt{2}+2}-\sqrt{2}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}-$ $-\sqrt{2}=3+\sqrt{2}-\sqrt{2}=3;$

б) $\sqrt{27-5\sqrt{8}}+\sqrt{2}=\sqrt{27-10\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\sqrt{25-10\sqrt{2}+2}+$ $+\sqrt{2}=\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}+\sqrt{2}=5-\sqrt{2}+\sqrt{2}=5.$

446. а) $\sqrt{55+\sqrt{216}}=\sqrt{\dfrac{55+\sqrt{3025-216}}{2}}+\sqrt{\dfrac{55-\sqrt{3025-216}}{2}}=$ $=\sqrt{\dfrac{55+53}{2}}+\sqrt{\dfrac{55-53}{2}}=\sqrt{54}+1=3\sqrt{6}+1;$

б) $\sqrt{86-\sqrt{5460}}=\sqrt{\dfrac{86+\sqrt{7396-5460}}{2}}-\sqrt{\dfrac{86-\sqrt{7396-5460}}{2}}=$ $=\sqrt{\dfrac{86+44}{2}}-\sqrt{\dfrac{86-44}{2}}=\sqrt{65}-\sqrt{21}.$

447. а) $a=\sqrt{11+\sqrt{85}}-\sqrt{11-\sqrt{85}};$

$a^2=11+\sqrt{85}+11-\sqrt{85}-2\sqrt{121-85}=22-12=10;\ a=\sqrt{10}.$

448. а) $\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}}=\sqrt{12+1+4\sqrt{3}}-\sqrt{12+1-4\sqrt{3}}=$ $=\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2}=2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}+1=2$ — рациональное число;

б) $a=\sqrt{19-2\sqrt{34}}+\sqrt{19+2\sqrt{34}}$. Вычислим a^2:

$a^2=19-2\sqrt{34}+19+2\sqrt{34}+2\sqrt{361-136}=38+2\sqrt{225}=68;$

$a=\sqrt{68}$ — иррациональное число.

449. а) $\dfrac{\sqrt{4-\sqrt{11}}}{\sqrt{4+\sqrt{11}}}=\dfrac{\sqrt{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})}}{4+\sqrt{11}}=\dfrac{\sqrt{16-11}}{4+\sqrt{11}}=\dfrac{\sqrt{5}(4-\sqrt{11})}{16-11}=$

$=\dfrac{\sqrt{5}(4-\sqrt{11})}{5}$;

б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{5-3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$.

450. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\times$
$\times\sqrt{4-(2+\sqrt{3})}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=1.$

451. а) Возведём в квадрат левую часть равенства:

$$10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}=10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}.$$

Квадрат правой части равен

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=2+3+5+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}=$$
$$=10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}.$$

Так как левая и правая части равенства — положительные числа, то равенство доказано.

452. а) $\sqrt{\dfrac{b+1}{2}-\sqrt{b}}-\sqrt{\dfrac{b+1}{2}+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{b+1-2\sqrt{b}}{2}}-\sqrt{\dfrac{b+1+2\sqrt{b}}{2}}=$

$=\dfrac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{2}}$, так как $b\geqslant 1$. Полученная разность равна $-\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{\dfrac{c+4}{4}+\sqrt{c}}-\sqrt{\dfrac{c+4}{4}-\sqrt{c}}=\sqrt{\dfrac{c+4+4\sqrt{c}}{4}}-\sqrt{\dfrac{c+4-4\sqrt{c}}{4}}=$

$=\dfrac{\sqrt{c}+2}{2}-\dfrac{\sqrt{c}-2}{2}$, так как $\sqrt{c}\geqslant 2$. Полученная разность равна 2.

453. а) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}=\sqrt{(a-1)+2\sqrt{a-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}=$
$=\sqrt{a-1}+1$, так как $a\geqslant 1$;

б) $\sqrt{a+b+1+2\sqrt{a+b}}-\sqrt{a+b+1-2\sqrt{a+b}}=\sqrt{(\sqrt{a+b}+1)^2}-$

$-\sqrt{(\sqrt{a+b}-1)^2}=\sqrt{a+b}+1-\sqrt{a+b}+1=2$, так как $a+b\geqslant 1$.

ГЛАВА III

Квадратные уравнения

§ 8. Квадратное уравнение и его корни

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
21	Неполные квадратные уравнения	2 (2)
22	Формула корней квадратного уравнения	3 (4)
23	Решение задач с помощью квадратных уравнений	3 (6)
24	Теорема Виета	2 (3)
	Контрольная работа № 5	1

Содержание материала

В данном параграфе вводятся понятия квадратного уравнения, приведённого квадратного уравнения, неполного квадратного уравнения. Обобщаются сведения о способах решения неполных квадратных уравнений. Выводится общая формула корней квадратного уравнения и формула корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом. В систему упражнений включены разнообразные квадратные уравнения общего вида, при решении которых находят применение данные формулы. Расширяется тематика текстовых задач, решаемых с помощью уравнений, в их число входят задачи, имеющие более одного решения. Для соответствующих случаев, рассмотренных в пункте 23, даётся практическое истолкование. Завершается изучение параграфа ознакомлением учащихся с теоремой Виета и обратной ей теоремой.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы систематизировать известные учащимся сведения о способах решения неполных квадратных уравнений, сформировать умения решать квадратные уравнения с помощью общей формулы корней квадратного уравнения и формулы корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом, а также решать некоторые задачи, используя квадратные уравнения в качестве математической модели.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

В ходе изучения данного параграфа учащиеся овладевают умением решать квадратные уравнения вида $ax^2 + c = 0$, где $a \neq 0$ и $c \neq 0$, $ax^2 + bx = 0$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$, $ax^2 = 0$, где $a \neq 0$, и уравнения, сводящиеся к одному из этих видов. Впервые учащиеся встречаются с несложными текстовыми задачами, решаемыми с помощью неполных квадратных уравнений. Формируется умение решать квадратные уравнения, используя общую формулу корней квадратного уравнения и формулу корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом. Продолжается работа по формированию умения учащихся применять аппарат уравнений для решения текстовых задач, интерпретировать результат. Учащимся предлагаются разнообразные задачи, в том числе задачи с практическим содержанием, при решении которых в качестве математической модели используются квадратные уравнения.

Методический комментарий

Изучение главы III «Квадратные уравнения» начинается с пункта 21 «Неполные квадратные уравнения». Здесь вводятся понятия квадратного уравнения, приведённого квадратного уравнения, неполного квадратного уравнения. Учащиеся должны знать, как называются коэффициенты a, b и c в уравнении вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, уметь указывать эти коэффициенты в различных квадратных уравнениях. В этом отношении полезным является упражнение **513**. В пункте 21 систематизируются известные учащимся приёмы решения неполных квадратных уравнений, которые находят непосредственное применение в заданиях **516—520**. В упражнениях **521—523** представлены более сложные случаи, когда требуется выполнить некоторые преобразования, чтобы привести заданные уравнения к одному из видов $ax^2 = 0$, $ax^2 + b = 0$, где $b \neq 0$, $ax^2 + cx = 0$, где $c \neq 0$. Принципиально новым для учащихся шагом является решение с помощью неполных квадратных уравнений текстовых задач. При выполнении упражнений **524—530** они убеждаются в важности формируемых умений. Здесь учащиеся впервые встречаются с ситуацией, когда один из найденных корней уравнения не соответствует смыслу задачи.

Следующий пункт 22 «Формула корней квадратного уравнения» посвящён квадратным уравнениям общего вида. Сначала рассматривается решение полного квадратного уравнения с числовыми коэффициентами. Далее все выкладки повторяются для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с буквенными коэффициентами a, b и c, отличными от нуля, и выводится общая формула корней. Учащиеся овладевают умением решать квадратные уравнения, используя соответствующую последовательность шагов:

1) вычисляют дискриминант квадратного уравнения по формуле $D = b^2 - 4ac$;

2) если дискриминант положителен или равен нулю, то находят корни уравнения по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;

3) если дискриминант отрицателен, то делают вывод, что корней нет.

Из общей формулы корней квадратного уравнения легко выводится формула корней квадратного уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$ с чётным вторым коэффициентом: $x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$, где $k = \frac{b}{2}$, $D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$.

Необходимо отметить, что умение решать квадратные уравнения с помощью общей формулы корней или формулы корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом относится к числу важнейших умений, формируемых в курсе алгебры. Не овладев этим умением, учащиеся не смогут усваивать последующие разделы курса. Поэтому необходимо своевременно организовать дополнительные занятия с учащимися, не усвоившими этот материал.

Важно обратить внимание учащихся на то, что при решении квадратных уравнений с помощью общей формулы корней квадратного уравнения или формулы корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом часто бывает удобно упростить уравнение, выполнив некоторые преобразования: умножить все члены уравнения на -1, если первый коэффициент отрицателен, избавиться от дробных коэффициентов, умножив все члены уравнения на общий знаменатель дробей, сократить все члены уравнения на одно и то же число, если это возможно. В системе упражнений, включённых в пункт 22, рекомендуется уделить внимание задачам **549** и **554**. Упражнение **549**, предназначенное для работы в парах, интересно тем, что в нём сравниваются результаты аналитического и графического способов решения квадратного уравнения. В упражнении **554** представлена задача-исследование, в которой сопоставляются корни уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, и $cx^2 + bx + a = 0$, где $c \neq 0$.

В пункте 23 «Решение задач с помощью квадратных уравнений» продолжается формирование умения учащихся решать текстовые задачи, переходя от словесной формулировки к математической модели. В авторских примерах показано применение квадратных уравнений при решении геометрической задачи и задачи из курса физики. В первой из них один из найденных корней квадратного уравнения не соответствует смыслу задачи. Вторая задача интересна тем, что оба корня уравнения удовлетворяют условию задачи и отражают реальную ситуацию, которая наглядно иллюстрируется в учебнике с помощью графика функции $h = 40t - 5t^2$.

Представленные в пункте 23 задачи разнообразны по тематике. В их число входят задачи с практическим содержанием, некоторые геометрические задачи. Живой интерес у учащихся обычно вызывают включённые в учебник старинные задачи.

Следует обратить внимание учащихся на то, что решение текстовой задачи не заканчивается решением квадратного уравнения, составленного по её условию. Важным шагом является интерпретация полученного результата, сопоставление его с условием задачи.

Завершается § 8 пунктом 24 «Теорема Виета». Здесь доказывается теорема, выражающая связь между суммой и произведением корней приведённого квадратного уравнения и его коэффициентами, получившая название «теорема Виета». Следует обратить внимание учащихся на то, что речь идёт о приведённом квадратном уравнении. Заметим, что для того, чтобы распространить теорему Виета на случай, когда уравнение имеет единственный корень, условливаются считать, что такое уравнение имеет два одинаковых корня. Доказывается также теорема, обратная теореме Виета. Рассмотрение указанных теорем ещё раз убеждает учащихся в том, что теоремы доказываются не только в курсе геометрии.

При изучении данного пункта полезно предложить учащимся рассмотреть портрет Франсуа Виета, рассказать им о его работах, используя материал, приведённый в пункте, а также в разделе «Исторические сведения».

Включённые в данный пункт упражнения позволяют учащимся повторить многие сведения о квадратных уравнениях, с которыми они ознакомились в данном параграфе. Особое внимание рекомендуется уделить упражнениям **593** и **595**, предназначенным для работы в парах. При выполнении данных упражнений учащиеся должны не только дать ответы на поставленные вопросы, но и привести соответствующие обоснования.

Из дополнительных упражнений к § 8 полезно предложить учащимся задания **651—653**, текстовые задачи **665—667**, а также некоторые из заданий, связанных с теоремой Виета и обратной ей теоремой.

Указания к основным упражнениям учебника

520. Данное уравнение является неполным квадратным уравнением, если $a^2 - 4 = 0$ и при этом $a - 2 \neq 0$, т. е. если $a = -2$.

527. Обозначим искомое время через x ч, тогда за это время первая группа туристов прошла $4x$ км, а вторая — $5x$ км. Направления движения двух туристических групп взаимно перпендикулярны, следовательно, расстояние между ними можно определить как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами $4x$ и $5x$. Получим уравнение

$$16x^2 + 25x^2 = 256;\ x^2 = \frac{256}{41};\ x_1 = -\sqrt{\frac{256}{41}};\ x_2 = \sqrt{\frac{256}{41}} \approx 2{,}5.$$

Отрицательное значение корня не соответствует смыслу задачи. Искомое время приближённо равно 2,5 ч.

530. Пусть стороны прямоугольника равны $4x$ и $3x$. Имеем уравнение

$$16x^2 + 9x^2 = 625;\quad 25x^2 = 625;\quad x_1 = -5;\ x_2 = 5.$$

Отрицательное значение корня не соответствует смыслу задачи. При $x = 5$ получаем ответ: стороны прямоугольника равны 20 и 15 дюймов или 50,8 и 38,1 см.

546. в) $\dfrac{4x^2 - 1}{3} = x(10x - 9);\ 4x^2 - 1 = 30x^2 - 27x;$

$26x^2 - 27x + 1 = 0;\ D = 729 - 104 = 625;$

$$x_1 = \frac{27 - 25}{52};\ x_2 = \frac{27 + 25}{52};\ x_1 = \frac{1}{26};\ x_2 = 1.$$

547. в) $3(y^2 - 2)y = 0;\quad 3y^2 - y - 6 = 0;\quad D = 1 + 72 = 73.$

Находим с помощью калькулятора, что $\sqrt{73} \approx 8{,}54.$

$$y_1 = \frac{1 - \sqrt{73}}{6};\ y_2 = \frac{1 + \sqrt{73}}{6};\ y_1 \approx -1{,}26;\ y_2 \approx 1{,}59.$$

549. (*Для работы в парах.*) Для графического решения квадратного уравнения представим его в виде равенства двух функций: а) $y = x^2$ и $y = 2x + 1$; б) $y = x^2$ и $y = 4x - 2$.

Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения параболы и прямой: а) $x_1 \approx -0{,}4$, $x_2 \approx 2{,}4$; б) $x_1 \approx 0{,}6$, $x_2 \approx 3{,}4$.

Решив данное уравнение с помощью формулы корней квадратного уравнения, получим:

а) $x^2 - 2x - 1 = 0;$
$D = 4 + 4 = 8;$

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2};\ x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2};$$

$x_1 = 1 - \sqrt{2};\ x_2 = 1 + \sqrt{2};$

б) $x^2 - 4x + 2 = 0;$
$D = 16 - 8 = 8;$

$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2};\ x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2};$$

$x_1 = 2 - \sqrt{2};\ x_2 = 2 + \sqrt{2}.$

553. а) Преобразуем равенство и решим получившееся квадратное уравнение:

$$3a + 0{,}6 = 9a^2 + 0{,}36; \quad 9a^2 - 3a - 0{,}24 = 0;$$

$$D = 1 + 0{,}96 = 1{,}96; \; a_1 = \frac{1 - 1{,}4}{6}; \; a_2 = \frac{1 + 1{,}4}{6};$$

$$a_1 = -\frac{1}{15}; \; a_2 = \frac{2}{5}.$$

Значит, существует два значения переменной a, при которых выполняется исходное равенство.

554. (*Задача-исследование.*) а) Найдём корни уравнений:

$x^2 - 5x + 6 = 0;$ $\quad 6x^2 - 5x + 1 = 0;$

$D = 25 - 24 = 1;$ $\quad D' = 25 - 24 = 1;$

$x_1 = 2; \; x_2 = 3;$ $\quad x_1' = \frac{1}{3}; \; x_2' = \frac{1}{2};$

б) найдём корни уравнений:

$2x^2 - 13x + 6 = 0;$ $\quad 6x^2 - 13x + 2 = 0;$

$D = 169 - 48 = 121;$ $\quad D' = 169 - 48 = 121;$

$x_1 = \frac{13 - 11}{4}; \; x_2 = \frac{13 + 11}{4};$ $\quad x_1' = \frac{13 - 11}{12}; \; x_2' = \frac{13 + 11}{12};$

$x_1 = \frac{1}{2}; \; x_2 = 6;$ $\quad x_1' = \frac{1}{6}; \; x_2' = 2.$

Можно высказать предположение, что корни уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$ являются взаимно обратными числами, т. е. их произведение равно 1. Докажем это.

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac;$$

корни уравнения $cx^2 + bx + a = 0$

$$x_1' = \frac{-b - \sqrt{D'}}{2c}; \; x_2' = \frac{-b + \sqrt{D'}}{2c}, \quad \text{где } D' = b^2 - 4ac = D.$$

Умножим первый корень первого уравнения на второй корень второго:

$$x_1 x_2' = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2c} = \frac{b^2 - D}{4ac} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4ac} = \frac{4ac}{4ac} = 1.$$

Аналогично показывается, что $x_2 x_1' = 1$.

555. Найдём дискриминант уравнения $x^2 - ax + a - 4 = 0$:

$$D = a^2 - 4(a - 4) = a^2 - 4a + 16 = (a - 2)^2 + 12.$$

Значение дискриминанта положительно при любом значении a, следовательно, при любом значении a уравнение имеет два корня. Случаи, когда уравнение не имеет корней или имеет один корень, невозможны.

566. Обозначим ширину листа картона через x см, тогда площадь каждого из отрезанных квадратов равна x^2 см^2, а площадь оставшейся части листа равна $(26 - 2x)x$ см^2. Имеем уравнение $26x - 2x^2 = 80$; $x^2 - 13x + 40 = 0$, отсюда $x_1 = 5$; $x_2 = 8$.

Оба эти корня соответствуют смыслу задачи. Задача имеет два решения: ширина листа равна 5 см или 8 см.

569. Пусть x — общее число обезьян. Имеем уравнение

$$x - \left(\frac{1}{8}x\right)^2 = 12.$$ Корни этого уравнения $x_1 = 16$; $x_2 = 48$.

Задача имеет два решения: в стае 16 или 48 обезьян.

570. Обозначим общее число обезьян через x. Уравнение имеет вид $\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 + 1 = x$. Решив уравнение, получим $x_1 = 5$; $x_2 = 50$.

Первый корень не соответствует смыслу задачи, так как пятая часть этого числа должна быть больше 3. Итак, всего было 50 обезьян.

572. Обозначим через n общее число команд. Они сыграют $\frac{n(n-1)}{2}$ матчей. Имеем уравнение $\frac{n(n-1)}{2} = 36$, решив которое получим $n_1 = -8$; $n_2 = 9$.

Первый корень не соответствует смыслу задачи. Значит, было 9 команд.

574. Пусть x см — сторона квадрата, тогда длина дна коробки равна $(60 - 2x)$ см, а ширина дна равна $(40 - 2x)$ см. Имеем уравнение $(60 - 2x)(40 - 2x) = 800$.

Корни этого уравнения $x_1 = 10$; $x_2 = 40$.

Второй корень не соответствует смыслу задачи. Значит, сторона квадрата равна 10 см.

575. Пусть n — меньшее из трёх последовательных целых чисел. Имеем уравнение $n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 869$.

После упрощения получаем уравнение $n^2 + 2n - 288 = 0$, корни которого $n_1 = -18$; $n_2 = 16$.

Задача имеет два решения: искомые числа -18; -17; -16 или 16; 17; 18.

585. Рекомендуется рассмотреть с учащимися два возможных способа решения.

I способ. Так как один из корней уравнения равен 7, а произведение корней равно -35, то второй корень равен -5. Сумма корней равна 2, следовательно, $p = -2$.

II способ. Так как 7 — корень уравнения, то, подставив это число в уравнение, получим верное равенство: $7^2 + 7p - 35 = 0$. Отсюда $p = -2$. Второй корень уравнения можно найти либо решив уравнение $x^2 - 2x - 35 = 0$, либо воспользовавшись теоремой Виета: $x_2 = -5$.

588. Подставив значение корня 5,3 в уравнение, получим $10 \cdot 5{,}3^2 - 33 \cdot 5{,}3 + c = 0$. Отсюда $c = -106$. По теореме Виета произведение корней равно $\frac{-106}{10}$, т. е. $-10{,}6$. Значит, второй корень уравнения равен $\frac{-10{,}6}{5{,}3}$, т. е. -2.

591. Найдём корни уравнения, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 12, \\ x_1 + x_2 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 12, \\ x_1 + x_2 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = -6, \\ x_1 + x_2 = -2; \end{cases}$$

$x_1 = -4$; $x_2 = 2$; $q = x_1x_2$, следовательно, $q = -8$.

592. По условию задачи $x_1^2 + x_2^2 = 65$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Выразим сумму квадратов корней через их сумму и произведение: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 \cdot x_2 = a$. Имеем $65 = 9 - 2a$; $a = -28$.

593. (*Для работы в парах.*) г) Уравнение $19x^2 - 23x + 5 = 0$ имеет два корня, так как $D = 529 - 380 > 0$. Произведение корней равно $\frac{5}{19}$, следовательно, корни имеют одинаковые знаки;

д) уравнение $2x^2 + 5\sqrt{3}x + 11 = 0$ не имеет корней, так как $D = (5\sqrt{3})^2 - 88 = 75 - 88 < 0$;

е) уравнение $11x^2 - 9x + 7 - 5\sqrt{2} = 0$ имеет два корня, так как $D = 81 - 44(7 - 5\sqrt{2}) = 81 - 308 + 220\sqrt{2} \approx 81 - 308 + 311 > 0$. Произведение корней равно $\frac{7 - 5\sqrt{2}}{11}$. Это число отрицательное, так как $\sqrt{2} > 1{,}4$, следовательно, знаки корней разные.

595. (*Для работы в парах.*) а) Выразим сумму квадратов корней данного уравнения через их сумму и произведение:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -5$, $x_1x_2 = m$. Имеем уравнение $65 = (-5)^2 - 2m$, отсюда $m = -20$;

б) выразим сумму кубов корней данного уравнения через сумму корней и их произведение:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) =$$
$$= (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2).$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -5$; $x_1x_2 = m$. Имеем уравнение $(-5) \cdot (25 - 3m) = 40$, отсюда $m = 11$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

651. б) Уравнение $x^2 = a^2$ имеет единственный корень $x = 0$ при $a = 0$; если $a \neq 0$, уравнение имеет два корня: $x_1 = -a$; $x_2 = a$;

в) если в уравнении $x^2 + 4b = 0$ значение $b > 0$, то корней нет, если $b = 0$, то уравнение имеет один корень $x = 0$, если $b < 0$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = -2\sqrt{-b}$, $x_2 = 2\sqrt{-b}$;

г) если в уравнении $x^2 + 9b^2 = 0$ значение $b = 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = 0$, если $b \neq 0$, то уравнение корней не имеет.

652. г) Выделим в числителе дроби квадрат двучлена:

$$\frac{p^2 - 6p + 18}{p^2 + 1} = \frac{p^2 - 6p + 9 + 9}{p^2 + 1} = \frac{(p-3)^2 + 9}{p^2 + 1}.$$

При любом значении p значения числителя и знаменателя дроби положительны, значит, положительно и значение дроби.

660. Обозначим через x среднее из пяти последовательных целых чисел. Запишем уравнение

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2.$$

После упрощения получим $x^2 - 12x = 0$. Корни этого уравнения 0 и 12.

Задача имеет два решения. Искомые числа –2; –1; 0; 1; 2 или 10; 11; 12; 13; 14.

661. Обозначим через x среднее из трёх последовательных чётных чисел. Имеем уравнение

$$(x-2)^2 + x^2 = (x+2)^2.$$

Корни этого уравнения $x_1 = 0$; $x_2 = 8$. Значит, задача имеет два решения: –2; 0; 2 или 6; 8; 10.

663. Обозначим одну из сторон прямоугольника через x см, тогда длина смежной с ней стороны равна $(14 - x)$ см. Имеем уравнение

$$x^2 + (14 - x)^2 = 116.$$

Решив это уравнение, получим его корни: $x_1 = 4$, $x_2 = 10$. Итак, стороны прямоугольника равны 4 и 10 см.

664. Обозначим ширину рамки через x см. Тогда площадь, занятая фотокарточкой вместе с рамкой, составит $(18 + 2x)(12 + 2x)$ см^2. Имеем уравнение

$$(18 + 2x)(12 + 2x) = 280.$$

Корни этого уравнения $x_1 = -16$; $x_2 = 1$. Первый корень не соответствует смыслу задачи. Значит, ширина рамки равна 1 см.

665. Пусть x м — ширина бордюра. Тогда площадь клумбы равна $(4{,}5 - 2x)(2{,}5 - 2x)$ м^2, а площадь бордюра $4{,}5 \cdot 2{,}5 - (4{,}5 - 2x)(2{,}5 - 2x)$ м^2. Имеем уравнение

$$4{,}5 \cdot 2{,}5 - (4{,}5 - 2x)(2{,}5 - 2x) = 3{,}25.$$

После упрощения получаем $4x^2 - 14x + 3{,}25 = 0$.

Корни этого уравнения $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 3{,}25$. Второй корень не соответствует смыслу задачи, так как удвоенная ширина бордюра должна быть меньше 2,5 см. Итак, ширина бордюра равна 0,25 м.

666. Предположим, что некто купил лошадь за x пистолей. Тогда при продаже её он потерял $(x - 24)$ пистолей, что составляет x % от первоначальной стоимости лошади, т. е. x % от x. Имеем уравнение

$$x - 24 = \frac{x^2}{100}; \; x^2 - 100x + 2400 = 0.$$

Корни уравнения $x_1 = 40$; $x_2 = 60$.

Задача имеет два решения. Лошадь стоила 40 пистолей или 60 пистолей.

667. Обозначим ширину дна ящика через x м, тогда длина дна ящика равна $2x$ м, а площадь дна равна $2x^2$ м^2. Сумма площадей боковых стенок равна $(2x \cdot 0{,}5 + 4x \cdot 0{,}5)$ м^2. Имеем уравнение

$$(x + 2x) - 2x^2 = 1{,}08; \quad 2x^2 - 3x + 1{,}08 = 0.$$

Решив уравнение, получим $x_1 = 0{,}6$, $x_2 = 0{,}9$. Следовательно, стороны прямоугольника равны 0,6 и 1,2 м или 0,9 и 1,8 м.

Задача имеет два решения. Объём ящика равен $0{,}6 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}5$, т. е. 0,36 м^3, или $0{,}9 \cdot 1{,}8 \cdot 0{,}5$, т. е. 0,81 м^3.

668. Пусть x см — ширина листа картона, тогда $1{,}5x$ см — длина этого листа. Объём открытой коробки равен $(x - 16) \times$ $\times (1{,}5x - 16) \cdot 8$ (м^3). Имеем уравнение

$$(x - 16)(1{,}5x - 16) \cdot 8 = 6080.$$

Решив это уравнение, получим $x_1 = -\frac{28}{3}$; $x_2 = 36$. Отрицательный корень не соответствует смыслу задачи. Следовательно, стороны листа картона равны 36 и 54 см.

669. Пусть n — первое из двух последовательных натуральных чисел. Уравнение имеет вид $(n + 1)^3 - n^3 = 919$.

Применив формулу разности кубов, получим

$$(n + 1 - n)(n^2 + 2n + 1 + n^2 + n + n^2) = 919;$$
$$3n^2 + 3n + 1 = 919; \quad 3n^2 + 3n - 918 = 0; \quad n^2 + n - 306 = 0.$$

Корни уравнения $n_1 = -18$; $n_2 = 17$. Первый корень не удовлетворяет условию задачи. Искомые числа 17 и 18.

670. Пусть n — первое из двух последовательных нечётных чисел. Имеем уравнение $(n+2)^3 - n^3 = 866$.

Применим формулу разности кубов:

$$(n+2-n)(n^2+4n+4+n^2+2n+n^2)=866;$$

$$2(3n^2+6n+4)=866; \quad 3n^2+6n-429=0; \quad n^2+2n-143=0.$$

Решив это уравнение, получим $n_1=-13$; $n_2=11$. Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Значит, искомые числа 11 и 13.

673. Убедимся сначала в том, что уравнение при любом значении b имеет два корня. Вычислим его дискриминант:

$$D=b^2+28\cdot 23.$$

Значение дискриминанта положительно при любом значении b, следовательно, уравнение имеет два корня. По теореме Виета произведение корней равно $-\frac{23}{7}$, значит, корни имеют разные знаки.

674. По теореме Виета произведение корней уравнения равно $\frac{a^2+1}{12}$, значение этой дроби положительно при любом значении a, т. е. корни имеют одинаковые знаки. Их сумма равна $-\frac{70}{12}$, следовательно, оба корня отрицательны.

К этому выводу можно прийти иначе. При любом положительном значении x все слагаемые в левой части окажутся положительными. Получится неверное равенство.

675. Подставив значение $x=1$ в уравнение $ax^2+bx+c=0$, получим верное равенство $a+b+c=0$, следовательно, $x=1$ — корень данного уравнения. Для нахождения второго корня воспользуемся теоремой Виета:

а) $x_1x_2=\frac{39}{2}$; $x_2=19{,}5$; б) $x_1x_2=-\frac{260}{17}$; $x_2=-15\frac{5}{17}$.

678. Обозначим корни уравнения $4x^2+bx-27=0$ через x_1 и x_2. Имеем $x_1=-3x_2$. Тогда произведение корней равно $x_2\cdot(-3x_2)=-\frac{27}{4}$, отсюда $x_2^2=\frac{9}{4}$; $x_2=-\frac{3}{2}$; $x_1=\frac{9}{2}$ или $x_2=\frac{3}{2}$; $x_1=-\frac{9}{2}$.

Если $x_2=-\frac{3}{2}$, $x_1=\frac{9}{2}$, то $-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=-\frac{b}{4}$, т. е. $b=-12$;

если $x_2=\frac{3}{2}$, $x_1=-\frac{9}{2}$, то $\frac{3}{2}-\frac{9}{2}=-\frac{b}{4}$, т. е. $b=12$.

Задача имеет два решения: $b=-12$ или $b=12$.

679. По условию $(x_1 - x_2)^2 = 81$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + 90 = 0$. Выразим квадрат разности корней через их сумму и произведение:

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2.$$

Следовательно, $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 81$.

По теореме Виета $x_1x_2 = 90$; $x_1 + x_2 = -p$, значит, $p^2 - 360 = 81$; $p^2 = 441$; $p = -21$ или $p = 21$.

681. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $4x^2 + bx + c = 0$. По условию $x_1 = 0{,}5$, а $x_2 = c$. По теореме Виета $\begin{cases} 0{,}5 + c = -\dfrac{b}{4}, \\ 0{,}5 \cdot c = \dfrac{c}{4}. \end{cases}$

Из второго уравнения получаем $c = 0$. Тогда $-\dfrac{b}{4} = 0{,}5$; $b = -2$.

684. Обозначим корни данного уравнения через x_1 и x_2. По условию $x_1^2 + x_2^2 = 153$. Но $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 15^2 - 2q$. Следовательно, $225 - 2q = 153$, отсюда $q = 36$.

688. а) Обозначим корни искомого уравнения через $3x_1$ и $3x_2$.

$$3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2) = 3 \cdot (-p) = -3p;\ 3x_1 \cdot 3x_2 = 9x_1x_2 = 9q.$$

Для составления искомого уравнения воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета. Новое уравнение имеет вид $x^2 + 3px + 9q = 0$;

б) так как $x_1 + x_2 = -p$, то $(x_1 + 2) + (x_2 + 2) = -p + 4$.

Так как $x_1x_2 = q$, то $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = q - 2p + 4$.

Новое уравнение имеет вид $x^2 + (p - 4)x + q - 2p + 4 = 0$.

689. Пусть x_1' и x_2' — корни искомого уравнения. Тогда

$$x_1' + x_2' = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{p^2 - 2q}{q},\ \text{а}\ x_1' \cdot x_2' = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 1.$$

Новое уравнение имеет вид

$$x^2 - \frac{p^2 - 2q}{q}x + 1 = 0\ \text{или}\ qx^2 - (p^2 - 2q)x + q = 0.$$

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 19

10. В каждом из заданий представлено уравнение с параметром.

а) $y^2 - b^2 + 4b - 4 = 0$;

$y^2 = b^2 - 4b + 4$; $y^2 = (b - 2)^2$; $y_1 = b - 2$; $y_2 = 2 - b$;

б) $c^2 - \frac{2c}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}y^2 = 0;$

$9c^2 - 6c + 1 - y^2 = 0$; $y^2 = 9c^2 - 6c + 1$; $y^2 = (3c - 1)^2$; $y_1 = 3c - 1$; $y_2 = 1 - 3c$.

11. а) Уравнение $18x^2 + (a^2 - 81)x - 2 = 0$ является неполным квадратным уравнением, если $a^2 - 81 = 0$, т. е. если $a = -9$ или $a = 9$;

б) уравнение $(a + 2)x^2 - 14x + a^2 - 4 = 0$ является неполным квадратным уравнением, если $a^2 - 4 = 0$ и при этом $a + 2 \neq 0$, т. е. при $a = 2$.

12. Пусть один из катетов прямоугольного треугольника равен x см, тогда другой катет равен $5x$ см, а гипотенуза равна $\sqrt{x^2 + 25x^2}$ см. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна $26x^2$ см^2. Имеем уравнение

$$26x^2 = 52 \cdot 5x; \quad x^2 - 10x = 0; \quad x(x - 10) = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 10.$$

Первый корень не соответствует смыслу задачи. Следовательно, катеты треугольника равны 10 и 50 см.

13. в) $(2c - 5)^2 + (2c + 5)^2 + (c - 2)(c + 2) = c^2$;
$4c^2 - 20c + 25 + 4c^2 + 20c + 25 + c^2 - 4 = c^2$;
$8c^2 + 46 = 0$.
Данное уравнение не имеет корней.

14. В искомом двузначном числе $10a + b$ в соответствии с условием задачи $a \neq 0$, $a = 2b$, следовательно, значение b также отлично от нуля. Имеем уравнение

$$(10a + b)^2 = 294(a + b).$$

Так как $a = 2b$, то

$$(21b)^2 = 294 \cdot 3b; \quad b^2 - 2b = 0; \quad b(b - 2) = 0;$$
$$b_1 = 0; \quad b_2 = 2.$$

Первый корень не соответствует смыслу задачи. Значит, искомое число равно $10 \cdot 4 + 2$, т. е. равно 42.

П у н к т 20

12. В этих заданиях переменные a и m являются параметрами.

а) $(x - a)^2 - 2x + 4a = 2x + 12$;
$x^2 - 2ax + a^2 - 4x + 4a - 12 = 0$;
$x^2 - 2x(a + 2) + a^2 + 4a - 12 = 0$.

Применим формулу корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом:

$$D_1 = (a + 2)^2 - (a^2 + 4a - 12) = 16;$$
$$x_1 = a - 2; \quad x_2 = a + 6.$$

14. а) $\frac{(3m-1)(m+1)}{5}+\frac{(2m-1)^2}{3}=5+\frac{3m-m^2}{2}$.

Умножим обе части уравнения на 30:

$$6(3m-1)(m+1)+10(2m-1)^2=150+15(3m-m^2);$$
$$18m^2+12m-6+40m^2-40m+10-150-45m+15m^2=0;$$
$$73m^2-73m-146=0;\quad m^2-m-2=0;$$
$$D=1+8=9;\quad m_1=-1;\quad m_2=2.$$

П у н к т 21

5. Пусть x — первое из двух последовательных чётных чисел, тогда следующее чётное число равно $(x+2)$. Имеем уравнение

$$(x+2)^3-x^3=296.$$

Корни этого уравнения $x_1=-8$ и $x_2=6$. Задача имеет два решения. Искомые числа -8, -6 или 6, 8.

7. Пусть двузначное число имеет вид $10a+b$. Известно, что $a=b+2$. Имеем уравнение $(10a+b)(10b+a)=1008$.

Подставим вместо a сумму $b+2$:

$$(11b+20)(11b+2)=1008;\quad b^2+2b-8=0;$$
$$D_1=1+8=9;\quad b_1=-4;\quad b_2=2.$$

Отрицательный корень не соответствует смыслу задачи. Значит, искомое число равно $10\cdot(2+2)+2$, т. е. равно 42.

10. Так как за 2 с тело поднялось на 50 м, то из уравнения $h=v_0t-5t^2$ можно найти начальную скорость v_0:

$$50=2v_0-5\cdot4;\ v_0=35.$$

Имеем уравнение

$$35t-5t^2=60;\ t^2-7t+12=0;\ D=49-48=1;\ t_1=3;\quad t_2=4.$$

Задача имеет два решения. Тело окажется на высоте 60 м дважды: первый раз через 3 с (во время подъёма) и второй раз через 4 с (во время падения).

11. Пусть в данном многоугольнике n сторон. Число сторон нового многоугольника равно $3n$, а число его диагоналей равно $\frac{3n(3n-3)}{2}$. Имеем уравнение $\frac{3n(3n-3)}{2}-\frac{n(n-3)}{2}=126$.

После упрощения получим уравнение

$$4n^2-3n-126=0.$$

Корни данного уравнения $n_1=-\frac{21}{4}$; $n_2=6$. Первый корень не соответствует смыслу задачи. Значит, число сторон многоугольника равно 6.

Пункт 22

11. а) Один из корней данного уравнения равен нулю, если $9m^2 - 4 = 0$, т. е. если $m = -\frac{2}{3}$ или $m = \frac{2}{3}$;

б) корни являются противоположными числами, т. е. их сумма равна нулю, если $m = 3$;

в) корни являются взаимно обратными числами, т. е. их произведение равно 1, если $m = 2$.

12. По условию $\frac{x_1}{x_2} = -4$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Произведение корней x_1x_2 равно $-\frac{98}{2}$, следовательно, $-4x_2^2 = -49$. Получаем два значения корня: $x_2 = -\frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{7}{2}$.

Если $x_2 = -\frac{7}{2}$, то $x_1 = (-4) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = 14$, а $x_1 + x_2 = \frac{21}{2}$. Но $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2}$, следовательно, $b = -2 \cdot \frac{21}{2} = -21$;

если $x_2 = \frac{7}{2}$, то $x_1 = -14$, а $b = 21$.

Итак, коэффициент b имеет два значения: –21 и 21.

14. а) Обозначим корни нового уравнения через x_1' и x_2'. Имеем $x_1' = 5x_1$, $x_2' = 5x_2$. Тогда

$$x_1' + x_2' = 5x_1 + 5x_2 = 5(x_1 + x_2) = -5p;$$
$$x_1' \cdot x_2' = 5x_1 \cdot 5x_2 = 25x_1x_2 = 25q.$$

Новое уравнение имеет вид $x^2 + 5px + 25q = 0$;

б) если $x_1' = x_1 - 3$, $x_2' = x_2 - 3$, то

$$x_1' + x_2' = x_1 + x_2 - 6 = -p - 6 = -(p + 6);$$
$$x_1' \cdot x_2' = (x_1 - 3)(x_2 - 3) = x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 = q + 3p + 9.$$

Новое уравнение имеет вид $x^2 + (p + 6)x + q + 3p + 9 = 0$.

15. б) $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 81 + 60 = 141$;

в) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) =$
$= (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = (-9) \cdot (81 + 45) = -1134$;

г) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{111}{-15} = -7\frac{2}{5}$;

д) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1x_2)^2} = \frac{-1134}{225} = -5{,}04$ (мы воспользовались значением суммы кубов корней, найденным в пункте «в»).

§ 9. Дробные рациональные уравнения

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
25	Решение дробных рациональных уравнений	4 (6)
26	Решение задач с помощью рациональных уравнений	5 (6)
	Контрольная работа № 6	1

Содержание материала

В данном параграфе вводится понятие рационального уравнения, рассматриваются частные виды рациональных уравнений — целые уравнения и дробные рациональные уравнения. Соответствующие определения опираются на уже известные учащимся понятия — рационального выражения и его частных видов: целого и дробного выражений. Сопоставляются алгоритмы решения целого уравнения, содержащего дроби с числовыми знаменателями, и дробного рационального уравнения, подчёркивается их аналогичность. Приводится формулировка алгоритма решения дробного рационального уравнения. Продолжается формирование умения учащихся применять уравнения для решения текстовых задач. Учащиеся знакомятся с решением задач с помощью дробных рациональных уравнений.

Основная цель

Основная цель изучения материала данного параграфа состоит в том, чтобы сформировать умение учащихся решать дробные рациональные уравнения, сводящиеся к линейным или квадратным уравнениям, с последующим исключением лишних корней, если они появляются, а также использовать дробные рациональные уравнения для решения текстовых задач.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

В ходе изучения данного параграфа формируется умение учащихся решать дробные рациональные уравнения, выполняя соответствующую последовательность действий:

1) находить общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;

2) умножать обе части уравнения на общий знаменатель дробей;

3) решать получившееся целое уравнение;

4) исключать из найденных корней те, которые в исходном уравнении обращают в нуль общий знаменатель дробей.

Учащиеся выполняют, в частности, задания, в которых дробные рациональные уравнения решаются графическим методом. Они решают с помощью дробных рациональных уравнений достаточно сложные текстовые задачи, в число которых входят задачи на движение, совместную работу, смеси и сплавы.

Методический комментарий

При изучении данного параграфа учащиеся делают важные шаги в овладении приёмами решения уравнений с одной переменной. Ранее они занимались только решением целых уравнений, теперь им предстоит овладеть приёмом решения уравнений нового вида — дробных рациональных уравнений. В авторских примерах 1 и 2 пункта 25 сопоставляются решения целого уравнения, содержащего дроби с числовыми знаменателями, и дробного рационального уравнения, содержащего дроби с буквенными знаменателями. Учащиеся убеждаются, что приём решения уравнений, содержащих дроби с числовыми знаменателями, нельзя автоматически переносить на уравнения, в которые входят дроби с буквенными знаменателями. Важно, чтобы они усвоили чётко сформулированный в учебнике алгоритм решения дробных рациональных уравнений с одной переменной и следовали ему при выполнении упражнений **600—609**. Необходимо отметить, что выполнение этих упражнений может вызвать затруднения у некоторых учащихся, так как требует умения безошибочно выполнять преобразования дробных рациональных выражений. Таким учащимся можно предложить выполнить задания **690**, **693**, **695** из числа дополнительных заданий к § 9.

Специальное внимание следует уделить упражнению **610**, предназначенному для работы в парах. После окончания работы пар рекомендуется коллективно проверить, какие преобразования и в какой последовательности выполняли учащиеся. Полезно специально остановиться на заданиях **611** и **612**, иллюстрирующих применение графического метода при решении несложных дробных рациональных уравнений.

При изучении пункта 26 «Решение задач с помощью рациональных уравнений» учащиеся поднимаются на новую ступень в овладении умением применять аппарат уравнений для решения текстовых задач. Усложняются как фабулы задач, так и уравнения, составляемые по условиям задач.

На первом из уроков, выделенных на изучение пункта 26, можно ознакомить учащихся с приведённой в учебнике задачей 1. Эта задача интересна не только своей фабулой, но и тем, что один из корней уравнения, составленного по её условию, не соответствует смыслу задачи. На этом и последующих уроках можно предложить учащимся для классной и домашней работы некоторые из задач **617—629**. Интерес у учащихся обычно вызывают задачи на движение, а также старинная задача **625**. На третьем уроке, отводимом на решение текстовых задач с помощью рациональных уравнений, рекомендуется ознакомить учащихся с авторской задачей 2, приведённой в учебнике, и предложить им решить задачи **630**, **631**. Учащимся предоставляется возможность ещё раз убедиться в практической значимости умений, приобретаемых ими на уроках алгебры. При наличии времени можно предложить им решить одну из задач **717**, **718**, включённых в число дополнительных заданий к главе.

Заметим, что усложнённые задания **634** и **635** можно использовать для индивидуальной работы с хорошо успевающими учащимися.

Указания к основным упражнениям учебника

603. в) Общий знаменатель дробей равен $9y^2-1$. Умножив обе части уравнения на общий знаменатель, получим

$$4-4(3y-1)=-5(3y+1);\quad 3y+13=0;\quad y=-4\frac{1}{3};$$

д) в этом задании учащиеся впервые встречаются со случаем, когда найденный корень не является корнем данного уравнения.

$$\frac{3}{x}+\frac{4}{x-1}=\frac{5-x}{x^2-x};\quad 3(x-1)+4x=5-x;\quad 7x-3=5-x;\quad x=1.$$

Значение $x=1$ не является корнем исходного уравнения, так как при $x=1$ обращается в нуль знаменатель дроби x^2-x. Уравнение корней не имеет.

606. в) Задание сводится к решению уравнения:

$$\frac{y+1}{y-5}+\frac{10}{y+5}=\frac{y+1}{y-5}\cdot\frac{10}{y+5};$$

$$(y+1)(y+5)+10(y-5)=10(y+1);$$

$$y^2+6y-55=0;\quad D_1=9+55=64;\quad y_1=-11;\quad y_2=5.$$

Значение $y=5$ не является корнем исходного уравнения, так как при $y=5$ обращается в нуль знаменатель дроби $y-5$. Итак, уравнение имеет единственный корень $y=-11$.

609. в) $\dfrac{18}{4x^2+4x+1}-\dfrac{1}{2x^2-x}=\dfrac{6}{4x^2-1}$;

$\dfrac{18}{(2x+1)^2}-\dfrac{1}{x(2x-1)}=\dfrac{6}{(2x-1)(2x+1)}$;

$18x(2x-1)-(2x+1)^2=6x(2x+1)$;

$36x^2-18x-4x^2-4x-1=12x^2+6x$;

$20x^2-28x-1=0$;

$D_1=196+20=216$; $\quad x_1=\dfrac{7-3\sqrt{6}}{10}$; $\quad x_2=\dfrac{7+3\sqrt{6}}{10}$.

610. (*Для работы в парах*.) Здесь очень важно правильно определить порядок действий при преобразовании левой части уравнения.

а) Преобразуем левую часть уравнения:

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5-x^2}}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{5-x^2}{11-2x^2}}=1+\frac{11-2x^2}{3(11-2x^2)+(5-x^2)}=$$

$$=\frac{38-7x^2+11-2x^2}{38-7x^2}=\frac{49-9x^2}{38-7x^2}.$$

Имеем уравнение

$$\frac{49-9x^2}{38-7x^2}=\frac{31}{24};\ 24\cdot 49-24\cdot 9x^2=31\cdot 38-31\cdot 7x^2;$$

$$1176-216x^2=1178-217x^2;\ x^2=2;\ x_1=-\sqrt{2};\ x_2=\sqrt{2};$$

б) преобразуем левую часть уравнения:

$$1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10-x^2}}}=1-\cfrac{1}{2+\cfrac{10-x^2}{11-x^2}}=1-\frac{11-x^2}{32-3x^2}=\frac{21-2x^2}{32-3x^2}.$$

Имеем уравнение

$$\frac{21-2x^2}{32-3x^2}=\frac{3}{5};\ 105-10x^2=96-9x^2;\ x^2=9;\ x_1=-3;\ x_2=3.$$

612. Если $a=0$ и $b\neq 0$, т. е. прямая $y=ax+b$ параллельна оси y, то данное уравнение имеет единственный корень (рис. 7, *а*), если $a=0$ и $b=0$, то уравнение корней не имеет (в этом случае прямая совпадает с осью x).

При $a>0$ и любом значении b уравнение имеет два корня разных знаков (прямая пересекает обе ветви гиперболы $y=\dfrac{1}{x}$, причём каждую только в одной точке, рис. 7, *б*).

При $a<0$ уравнение может не иметь корней (рис. 7, *в*), иметь один положительный или один отрицательный корень

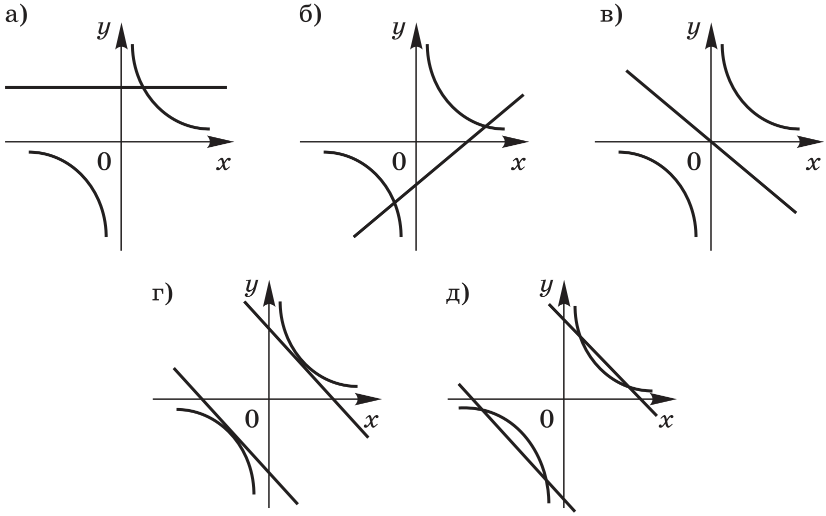


Рис. 7

(рис. 7, *г*), два положительных или два отрицательных корня (рис. 7, *д*).

619. Пусть скорость первого лыжника равна x км/ч, тогда скорость второго лыжника равна $(x+2)$ км/ч. Имеем уравнение $\frac{20}{x}-\frac{20}{x+2}=\frac{1}{3}$.

Решив это уравнение, получим $x_1=-12$; $x_2=10$. Отрицательный корень не соответствует смыслу задачи. Значит, скорости лыжников равны 10 и 12 км/ч.

622. Примем за x ц с га урожайность пшеницы в прошлом году, тогда в этом году урожайность составила $(x+2)$ ц с га. Имеем уравнение $\frac{192}{x}-\frac{192}{x+2}=0{,}4$.

Корни этого уравнения $x_1=-32$; $x_2=30$. Первый корень не соответствует смыслу задачи. Следовательно, урожайность была 30 ц с га.

624. Пусть предприниматель приобрёл x акций, тогда через год он мог бы приобрести лишь $(x-20)$ акций. Имеем уравнение

$$\frac{110\,000}{x-20}-\frac{110\,000}{x}=50.$$

После преобразований получаем уравнение $x^2-20x-44\,000=0$. Положительный корень этого уравнения: $x=220$. Итак, предприниматель приобрёл 220 акций.

625. Предположим, что обедало x человек, тогда каждый должен был уплатить $\frac{175}{x}$ шиллингов. Имеем уравнение

$$\frac{175}{x-2}-\frac{175}{x}=10.$$

Решив уравнение, получим его корни $x_1=-5$; $x_2=7$. Смыслу задачи соответствует только положительный корень. Значит, обедало 7 человек.

627. Пусть скорость лодки при движении по озеру равна x км/ч. Имеем уравнение $\frac{15}{x}-\frac{6}{x-2}=1.$

Корни этого уравнения $x_1=5$; $x_2=6$. Важно обратить внимание учащихся на то, что оба корня соответствуют смыслу задачи. Задача имеет два решения: скорость лодки при движении по озеру равна 5 км/ч или 6 км/ч.

630. Пусть x г — первоначальная масса раствора. Тогда концентрация раствора равна $\frac{30}{x}$. После добавления 100 г воды масса раствора стала равна $(x+100)$ г, а концентрация стала равна $\frac{30}{x+100}$. Концентрация раствора понизилась на 1%, т. е. на 0,01. Имеем уравнение $\frac{30}{x}-\frac{30}{x+100}=0{,}01.$

После преобразований получаем уравнение $x^2+100x-300\,000=0$. Корни этого уравнения $x_1=-600$; $x_2=500$. Смыслу задачи соответствует только второй корень. Значит, масса раствора составляла первоначально 500 г.

631. Пусть в сплаве было x г серебра, тогда содержание золота в первоначальном сплаве было $\frac{40}{40+x}$, а в новом — $\frac{90}{90+x}$. Содержание золота увеличилось на $20\ \%$, т. е. на 0,2. Имеем уравнение $\frac{90}{90+x}-\frac{40}{40+x}=0{,}2.$

Преобразуем это уравнение:

$$x^2-120x+3600=0;\quad (x-60)^2=0;\quad x=60.$$

Итак, в сплаве было 60 г серебра.

633. Пусть первому автомату для изготовления данного количества деталей требуется x ч, тогда второму автомату требуется $(x-2)$ ч. Два автомата работали вместе 2 ч 55 мин, что составляет $2\frac{11}{12}$ ч. Производительность при совместной работе двух автоматов равна $1:2\frac{11}{12}$, т. е. $\frac{12}{35}$.

Имеем уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=\frac{12}{35}.$$

Корни этого уравнения $x_1=\frac{5}{6}$; $x_2=7$. Первый корень не соответствует смыслу задачи, так как он меньше 2. Значит, первый автомат может изготовить данное количество деталей за 7 ч.

635. Пусть x км/ч — скорость мотоциклиста на первой половине пути, тогда на второй половине пути она была равна $(x-20)$ км/ч. Обозначим половину пройденного пути через s. На первую половину пути мотоциклист затратил $\frac{s}{x}$ ч, а на вторую — $\frac{s}{x+20}$ ч. Имеем уравнение

$$\frac{2s}{\frac{s}{x}+\frac{s}{x-20}}=37{,}5.$$

После упрощений получаем

$$2x^2-115x+750=0;\quad x_1=7{,}5;\quad x_2=50.$$

Первый корень меньше 20, поэтому он не соответствует смыслу задачи. Значит, первоначальная скорость мотоциклиста была равна 50 км/ч.

Заметим, что при решении этой задачи можно было воспользоваться формулой среднего гармонического двух величин x и $x-2$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

690. е) $\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}=\frac{20}{x^2-4}$;

$5x+10-3x+6=20$; $2x=4$; $x=2$.

Значение $x=2$ не является корнем исходного уравнения, так как при $x=2$ знаменатель первой дроби обращается в нуль. Уравнение корней не имеет.

691. Следует напомнить учащимся, что график функции пересекает ось x в точках, ординаты которых равны нулю, т. е. $y=0$.

а) Значение функции $y=\frac{2x-5}{x+3}$ равно нулю, если $2x-5=0$, а $x+3\neq 0$. Значит, график этой функции пересекает ось x в точке $(2{,}5;\ 0)$;

в) дробь $\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ при $x \neq 2$ можно сократить:

$$\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\frac{(x-3)(x-2)}{x-2}=x-3.$$

Графиком этой функции является прямая $y = x - 3$ с «выколотой» точкой, абсцисса которой равна 2. Этот график пересекает ось x в точке (3; 0);

г) $\dfrac{x^3-7x^2+12x}{x-3}=\dfrac{x(x-3)(x-4)}{x-3}=x(x-4)$ при $x \neq 3$. Графиком функции $y = x(x-4)$ при $x \neq 3$ является парабола $y = x^2 - 4x$ с «выколотой» точкой, абсцисса которой равна 3. Этот график пересекает ось x в точках (0; 0) и (4; 0).

693. а) Для того чтобы найти координаты точек пересечения графиков функций $y = 2x + 3$ и $y=\dfrac{34}{x-5}$, решим уравнение $2x+3=\dfrac{34}{x-5}$:

$$2x^2+3x-10x-15=34; \quad x_1=-3{,}5; \quad x_2=7.$$

Графики пересекаются в точках (–3,5; –4) и (7; 17).

694. а) Для того чтобы решить графически это уравнение, следует найти абсциссы точек пересечения графика функции $y=\dfrac{6}{|x|}$ и прямой $y = 1{,}5x - 2$ (рис. 8, *а*);

б) для того чтобы решить графически это уравнение, следует найти абсциссы точек пересечения графика функции $y=\dfrac{8}{|x|}$ и параболы $y = x^2$. Уравнение имеет два корня (рис. 8, *б*).

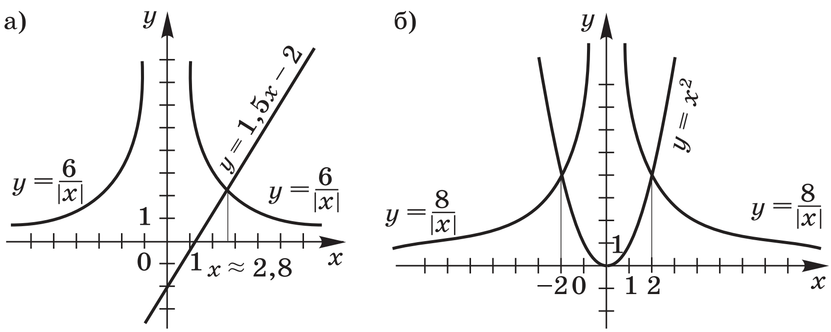


Рис. 8

695. а) После умножения обеих частей уравнения на произведение $(x\sqrt{3}+\sqrt{2})(x\sqrt{3}-\sqrt{2})$ получим

$$(x\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(x\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=10x;$$

$$6x^2+4=10x; \quad 3x^2-5x+2=0; \quad x_1=\frac{2}{3}; \quad x_2=1.$$

696. д) $\dfrac{9x+12}{x^3-64}-\dfrac{1}{x^2+4x+16}=\dfrac{1}{x-4}$;

$9x+12-(x-4)=x^2+4x+16$; $x^2-4x=0$; $x_1=0$; $x_2=4$.

Значение $x=4$ не является корнем данного уравнения, так как при $x=4$ обращается в нуль знаменатель дроби. Данное уравнение имеет единственный корень $x=0$;

ж) $\dfrac{32}{x^3-2x^2-x+2}+\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x+1}$;

$\dfrac{32}{(x-1)(x+1)(x-2)}+\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x+1}$;

$32+x+1=x^2-3x+2$; $x_1=2-\sqrt{35}$; $x_2=2+\sqrt{35}$.

697. б) Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{2}{y-3}+\frac{6}{y+3}=\frac{2}{y-3}:\frac{6}{y+3}; \quad \frac{2}{y-3}+\frac{6}{y+3}=\frac{y+3}{3(y-3)};$$

$$6(y+3)+18(y-3)=(y+3)^2;$$

$$y^2-18y+45=0; \quad y_1=3; \quad y_2=15.$$

При значении $y=3$ знаменатель первой дроби обращается в нуль, следовательно, $y=3$ не является корнем данного уравнения. Уравнение имеет единственный корень $y=15$.

698. Обозначим через x км/ч скорость поезда на первом участке, длина которого равна $\dfrac{600}{4}$, т. е. 150 км. Тогда скорость поезда на втором участке равна $(x+15)$ км/ч, а длина этого участка равна $600-150$, т. е. 450 км. Имеем уравнение

$$\frac{150}{x}+\frac{3}{2}+\frac{450}{x+15}=\frac{600}{x}; \quad \frac{450}{x}-\frac{450}{x+15}=\frac{3}{2};$$

$$450\cdot 30=3x(x+15);$$

$$x^2+15x-4500=0; \quad x_1=-75; \quad x_2=60.$$

Отрицательный корень не соответствует смыслу задачи. Значит, скорость поезда на первом участке пути была равна 60 км/ч, а на втором — 75 км/ч. Тогда в пути поезд был $\left(\dfrac{150}{60}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{450}{75}\right)$ ч, т. е. 10 ч.

701. Пусть x км/ч — скорость поезда на первом участке. Имеем уравнение

$$\frac{400}{x}+\frac{160}{x}+\frac{240}{x-20}=11; \quad \frac{560}{x}+\frac{240}{x-20}=11.$$

Корни этого уравнения $x_1=12\frac{8}{11}$; $x_2=80$. Первый корень не соответствует смыслу задачи, так как скорость поезда не может быть меньше 20 км/ч. Итак, скорость поезда на последнем участке пути равна 60 км/ч.

703. Пусть скорость течения в реке равна x км/ч, тогда в её притоке скорость равна $(x+1)$ км/ч. Имеем уравнение

$$\frac{35}{10-x}+\frac{18}{9-x}=8.$$

После упрощения получаем уравнение

$$8x^2-99x+225=0; \; x_1=3; \quad x_2=9\frac{3}{8}.$$

Второй корень не соответствует смыслу задачи, так как скорость лодки при движении вверх по притоку $(9-x)$ не может быть отрицательным числом. Значит, скорость течения реки равна 3 км/ч.

705. Пусть скорость течения реки равна x км/ч. Выразим скорость лодки в стоячей воде в километрах в час:

$$90 \text{ м/мин} = \frac{90\cdot 60}{1000}=5{,}4 \text{ км/ч}.$$

Скорость лодки против течения реки равна $(5{,}4-x)$ км/ч. Имеем уравнение

$$\frac{6}{5{,}4-x}+\frac{6}{x}=4{,}5.$$

После преобразования получим уравнение

$$5x^2-27x+36=0; \quad x_1=2{,}4; \quad x_2=3.$$

Следует обратить внимание учащихся на то, что задача имеет два решения: скорость течения реки равна 2,4 км/ч или 3 км/ч.

708. Пусть скорость первого автомобиля x км/ч, тогда на весь путь он потратил $\frac{120}{x}$ ч. Второй автомобиль за $\frac{3}{4}$ ч проехал $\frac{3}{4}x$ км, и ему осталось проехать $\left(120-\frac{3}{4}x\right)$ км.

Имеем уравнение

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{120-\frac{3}{4}x}{x+5}=\frac{120}{x}.$$

После преобразований получим

$$x^2+20x-2400=0;\quad x_1=-60;\ x_2=40.$$

Отрицательный корень не соответствует смыслу задачи. Значит, скорость первого автомобиля равна 40 км/ч.

711. Пусть x км/ч — скорость автомобиля, движущегося из города A, тогда скорость автомобиля, движущегося из города B, равна $(x+10)$ км/ч, а скорость сближения автомобилей равна $(2x+10)$ км/ч. Расстояние между городами A и B равно $5(2x+10)$ км, т. е. $(10x+50)$ км. Если бы встреча произошла в 150 км от города B, то второй автомобиль прошёл бы 150 км, а первый — $(10x+50-150)$ км, т. е. $(10x-100)$ км. Имеем уравнение

$$\frac{10x-100}{x}=\frac{150}{x+10}+\frac{9}{2};$$

$$11x^2-390x-2000=0;\ x_1=-4\frac{6}{11};\ x_2=40.$$

Смыслу задачи соответствует только положительный корень. Значит, скорость автомобиля, движущегося из города A, равна 40 км/ч, а расстояние AB равно $(10\cdot 40+50)$ км, т. е. 450 км.

712. Обозначим через x км/ч скорость катера в стоячей воде, тогда расстояние MN равно $6(x+2)$ км. Катер прошёл по течению реки $(6x+12-40)$ км, т. е. $(6x-28)$ км. После этого он повернул назад. Имеем уравнение

$$\frac{6x-28}{x+2}+\frac{6x-28}{x-2}=9;$$

$$3x^2-56x+36=0;\ x_1=\frac{2}{3};\ x_2=18.$$

Первый корень не соответствует смыслу задачи, так как скорость катера должна быть больше 2 км/ч. Значит, скорость катера в стоячей воде равна 18 км/ч.

713. Пусть x км/ч — первоначальная скорость мотоциклиста, тогда расстояние MN равно $5x$ км. Имеем уравнение

$$\frac{36}{x}+\frac{5x-36}{x+3}+\frac{1}{4}=5;\quad x^2-57x+432=0;\ x_1=9;\quad x_2=48.$$

Следует обратить внимание учащихся на то, что оба корня соответствуют смыслу задачи. Первоначальная скорость мотоциклиста равна 9 км/ч или 48 км/ч.

715. Предположим, что первая мастерская шила в день x костюмов, тогда она работала $\frac{160}{x}$ дней. Вторая мастерская шила в день $(x-10)$ костюмов и работала $\frac{120}{x-10}$ дней. Имеем уравнение

$$\frac{160}{x}+2=\frac{120}{x-10}-2;\ x^2-400=0;\ x_1=-20;\ x_2=20.$$

Смыслу задачи соответствует только положительный корень. Значит, вторая мастерская шила 10 костюмов в день.

717. Пусть x кг — масса первого сплава, тогда масса второго сплава равна $(60-x)$ кг. Масса меди составляет $\frac{6}{x}$ часть массы первого сплава и $\frac{3{,}6}{60-x}$ часть массы второго. Имеем уравнение

$$\frac{6}{x}-\frac{3{,}6}{60-x}=0{,}15;\ x^2-124x+2400=0;\ x_1=24;\ x_2=100.$$

Второй корень не соответствует смыслу задачи, так как масса первого сплава не может быть больше 60 кг. Значит, масса первого сплава 24 кг, а второго 36 кг.

718. Пусть первоначальная масса сплава была x кг, тогда после добавления 13 кг цинка она стала равной $(x+13)$ кг. Содержание меди в первоначальном сплаве было $\frac{x-6}{x}$, а в новом сплаве — $\frac{x-6}{x+13}$. Имеем уравнение

$$\frac{x-6}{x}-\frac{x-6}{x+13}=0{,}26;\ x^2-37x+300=0;\ x_1=12;\ x_2=25.$$

Оба корня уравнения соответствуют смыслу задачи. Следовательно, задача имеет два решения: первоначальная масса сплава равна 12 кг или 25 кг.

720. Пусть первый комбайн может собрать весь хлопок за x дней, тогда два комбайна, работая вместе, могут собрать весь хлопок за $(x-9)$ дней, а второй комбайн — за $(x-9+4)$ дней, т. е. за $(x-5)$ дней. Имеем уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-9}.$$

Корни этого уравнения $x_1=3$; $x_2=15$. Первый корень не соответствует смыслу задачи, так как число дней должно быть больше 9. Значит, первый комбайн может собрать весь хлопок за 15 дней, а второй — за 10 дней.

722. Пусть второй слесарь может выполнить заказ за x ч, тогда первый слесарь может выполнить заказ за $(x + 5)$ ч. Первый слесарь работал 5 ч, а второй — 4 ч. Имеем уравнение

$$\frac{5}{x+5} + \frac{4}{x} = 0{,}4.$$

После преобразований получаем уравнение $2x^2 - 35x - 100 = 0$, которое имеет положительный корень $x = 20$.

Итак, второй слесарь может выполнить заказ за 20 ч, а первый — за 25 ч.

723. Пусть ксерокопию со всей рукописи можно снять первой копировальной машиной за x мин, тогда с половины рукописи — за $\frac{x}{2}$ мин. Второй машиной можно снять ксерокопию с оставшейся половины рукописи за $\left(12{,}5 - \frac{x}{2}\right)$ мин, а со всей рукописи за $(25 - x)$ мин. Имеем уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{25-x} = \frac{1}{6}; \ x_1 = 10; \ x_2 = 15.$$

Если первой машиной можно снять ксерокопию со всей рукописи за 10 мин, то второй — за 15 мин. Если же первой машиной можно это сделать за 15 мин, то второй — за 10 мин.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 23

8. а) Умножив обе части уравнения на произведение $(x\sqrt{5} + \sqrt{2})(x\sqrt{5} - \sqrt{2})$, получим

$$(x\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + (x\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 = 13x; \ 10x^2 - 13x + 4 = 0;$$

$$D = 169 - 160 = 9; \ x_{1,2} = \frac{13 \pm 3}{20}; \ x_1 = 0{,}5; \ x_2 = 0{,}8.$$

9. а) Преобразуем левую часть уравнения:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 - x^2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{7 - x^2}{22 - 3x^2}} = 1 + \frac{22 - 3x^2}{51 - 7x^2}.$$

Уравнение примет вид

$$1 + \frac{22 - 3x^2}{51 - 7x^2} = 1\frac{10}{23}; \quad \frac{22 - 3x^2}{51 - 7x^2} = \frac{10}{23};$$

$$506 - 69x^2 = 510 - 70x^2; \ x^2 = 4; \ x_1 = -2; \ x_2 = 2.$$

10. б) $\dfrac{3}{4y^2-4y+1}+\dfrac{4}{4y^2-1}=\dfrac{1}{2y^2+y}$;

$$\frac{3}{(2y-1)^2}+\frac{4}{(2y-1)(2y+1)}=\frac{1}{y(2y+1)};$$
$$3y(2y+1)+4y(2y-1)=(2y-1)^2;$$
$$10y^2+3y-1=0;$$
$$D=9+40=49;\ y_{1,2}=\frac{-3\pm 7}{20};\ y_1=-\frac{1}{2};\ y_2=\frac{1}{5}.$$

Значение $y=-\dfrac{1}{2}$ не является корнем исходного уравнения, так как обращает в нуль знаменатель дроби. Уравнение имеет единственный корень $y=\dfrac{1}{5}$.

11. б) Решим уравнение

$$\frac{3z-1}{z+1}-\frac{z-1}{3z+1}=\frac{3z-1}{z+1}\cdot\frac{z-1}{3z+1};$$
$$(3z-1)(3z+1)-(z+1)(z-1)=(3z-1)(z-1);$$
$$9z^2-1-z^2+1=3z^2-4z+1;\quad 5z^2+4z-1=0;$$
$$D_1=4+5=9;\qquad z_{1,2}=\frac{-2\pm 3}{5};\qquad z_1=-1;\ z_2=\frac{1}{5}.$$

Значение $z=-1$ не является корнем исходного уравнения, так как обращает в нуль знаменатель дроби. Уравнение имеет единственный корень $z=0{,}2$.

12. а) $\dfrac{6}{x^3-4x^2-4x+16}-\dfrac{2x-1}{x^2-4}=\dfrac{3}{x-4}$;

$$\frac{6}{(x^2-4)(x-4)}-\frac{2x-1}{x^2-4}=\frac{3}{x-4};$$
$$6-(2x-1)(x-4)=3(x^2-4);\ 5x^2-9x-14=0;$$
$$D=81+280=361;\ x_{1,2}=\frac{9\pm 19}{10};\ x_1=-1;\ x_2=2{,}8.$$

П у н к т 24

5. Пусть x км/ч — скорость катера в стоячей воде. Имеем уравнение $\dfrac{24}{x+2}+\dfrac{24}{x-2}=2{,}7$.

После преобразований получим уравнение

$$9x^2-160x+36=0;\ x_1=-\frac{2}{9};\ x_2=18.$$

Смыслу задачи соответствует только положительный корень. Значит, скорость катера в стоячей воде равна 18 км/ч.

8. Заполним таблицу:

	Масса сплава, кг	Масса железа, кг	Процентное содержание железа в сплаве
Было	x	$x-4$	$\frac{x-4}{x}\cdot 100\,\%$
Стало	$x+2$	$x-4$	$\frac{x-4}{x+2}\cdot 100\,\%$

Имеем уравнение

$$\frac{x-4}{x}-\frac{x-4}{x+2}=0{,}1.$$

После преобразований получим уравнение

$$x^2-18x+80=0;$$
$$x_1=8; \quad x_2=10.$$

Задача имеет два решения: первоначальная масса сплава равна 8 кг или 10 кг.

9. Пусть через первую трубу бассейн может наполниться за x ч, тогда через вторую трубу он может наполниться за $(x+4)$ ч. Первая труба работала 8 ч, вторая — 5 ч. Имеем уравнение

$$\frac{8}{x}+\frac{5}{x+4}=0{,}75.$$

После преобразований получим уравнение

$$3x^2-40x-128=0; \; x_1=-2\frac{2}{3}; \quad x_2=16.$$

По смыслу задачи подходит только положительный корень. Значит, через первую трубу бассейн может наполниться за 16 ч, через вторую — за 20 ч.

11. Пусть два трактора при совместной работе могут вспахать поле за x дней, тогда первый трактор может вспахать всё поле за $(x+4{,}8)$ дней, а второй — за $(x+10{,}8)$ дней. Имеем уравнение

$$\frac{1}{x+4{,}8}+\frac{1}{x+10{,}8}=\frac{1}{x};$$
$$x^2-51{,}84=0; \; x_1=-7{,}2; \; x_2=7{,}2.$$

Оба трактора могут вспахать поле за 7,2 дня. Первый трактор может вспахать поле за $(7{,}2+4{,}8)$ дней, т. е. за 12 дней, а второй — за $(7{,}2+10{,}8)$ дней, т. е. за 18 дней.

Пункт 27. Уравнения с параметром

Методический комментарий

С понятиями «параметр», «уравнение с параметром» учащиеся фактически уже встречались в курсах алгебры 7 и 8 классов. Например, в учебнике «Алгебра, 7» линейное уравнение с одной переменной определяется как уравнение вида $ax=b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, т. е. различным образом используются буквенные обозначения в записи уравнения: считается, что буквами a и b обозначены некоторые фиксированные числа, а буквой x — неизвестное число. Аналогично поступали в 8 классе при рассмотрении неполных квадратных уравнений и квадратного уравнения общего вида.

В пункте 27 «Уравнения с параметром», предназначенном для учащихся, интересующихся математикой, в явном виде вводятся понятия параметра, уравнения с параметром, разъясняется смысл задания «решить уравнение с параметром». Учащиеся должны понимать, что уравнение с параметром представляет собой семейство уравнений, определяемых этим параметром, а требование «решить уравнение с параметром» означает, что для каждого семейства уравнений надо указать формулу, позволяющую вычислять значения корней соответствующих уравнений.

Знакомство с уравнениями с параметром начинается с простейшего уравнения $ax=5$. Выделяются случаи, когда $a\neq 0$ и когда $a=0$. На этом примере раскрывается смысл понятий уравнения с параметром и решения уравнения с параметром. Важно разъяснить учащимся, что задание «решить уравнение с параметром» означает, что требуется показать, каким образом для любого значения параметра можно найти соответствующее множество корней уравнения, если корни существуют, или установить, что при этом значении параметра уравнение не имеет корней.

Ознакомление восьмиклассников с материалом данного пункта можно провести в виде занятия математического кружка. Это занятие может начинаться с сообщения учителя, который разъяснит учащимся смысл понятий уравнения с параметром и решения уравнения с параметром. Важно обратить внимание учащихся на то, что для решения уравнения с параметром требуется выделить принципиально различные подмножества допустимых значений параметра и для каждого из них либо определить, что корней нет, либо найти формулу для их вычисления.

Далее учащиеся могут заслушать сообщения двух товарищей, которые расскажут о способах решения уравнений с параметром, рассмотренных в примерах 1 и 2 учебного текста. После этого можно приступить к выполнению некоторых упражнений, включённых в пункт 27.

Указания к упражнениям учебника

640. Надо выделить случаи $b+2\neq 0$ и $b+2=0$.

Если $b+2\neq 0$, то $x=3$; если $b+2=0$, т. е. $b=-2$, то x — любое число.

641. а) $py-p-1=0$; $py=p+1$.

Если $p\neq 0$, то уравнение имеет единственный корень $y=\dfrac{p+1}{p}$; если $p=0$, то уравнение примет вид $0\cdot y=1$ и, следовательно, не имеет корней;

б) $py-3y-4p+12=0$; $(p-3)y=4(p-3)$.

Если $p\neq 3$, то уравнение имеет единственный корень $y=4$; если $p=3$, то уравнение принимает вид $0y=0$, в этом случае оно имеет бесконечно много корней, любое число является корнем уравнения.

642. $ax-2x=a^3-2a^2-9a+18$; $(a-2)x=(a-2)(a^2-9)$.

Если $a\neq 2$, то уравнение имеет единственный корень $x=a^2-9$. Если $a=2$, то корнем уравнения является любое число.

643. Вычислим дискриминант данного уравнения: $D=16-8b$.

Если $16-8b<0$, т. е. $b>2$, то уравнение корней не имеет; если $16-8b=0$, т. е. $b=2$, то уравнение имеет единственный корень $x=1$; если $16-8b>0$, т. е. $b<2$, то уравнение имеет два корня: $x_1=\dfrac{2-\sqrt{4-2b}}{2}$; $x_2=\dfrac{2+\sqrt{4-2b}}{2}$.

644. а) Вычислим дискриминант уравнения: $D=25a^2-16a^2=9a^2\geqslant 0$.

Если $a=0$, то уравнение имеет единственный корень $x=0$; если $a\neq 0$, то уравнение имеет два корня: $x_1=\dfrac{5a-3a}{2}=a$; $x_2=\dfrac{5a+3a}{2}=4a$.

645. а) Уравнение имеет единственный корень, если $D=0$.

$$D=t^2-36;\ t^2-36=0 \text{ при } t_1=-6 \text{ и } t_2=6;$$

в) если $t=0$, то уравнение примет вид $-6x+1=0$. Это линейное уравнение, и оно имеет единственный корень $x=\dfrac{1}{6}$.

Если $t \neq 0$, то квадратное уравнение будет иметь единственный корень, если $D = 0$.

$$D = 36 - 4t; \;\; 36 - 4t = 0 \text{ при } t = 9.$$

646. Выразим сумму квадратов корней уравнения через его коэффициенты:

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2a + 6 = (a - 1)^2 + 5.$$

Наименьшее значение, равное 5, сумма квадратов корней уравнения принимает при $a = 1$.

647. Если $a = 1$, то уравнение имеет единственный корень $x = -1$; если $a \neq 1$, $\frac{D}{4} = a^2 - (a - 1)(a + 1) = 1 > 0$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{-a - 1}{a - 1} = \frac{a + 1}{1 - a}$; $x_2 = \frac{-a + 1}{a - 1} = -1$.

648. Вычислим дискриминант данного уравнения:

$$D = 16k^2 + 8k + 1 - 16k^2 - 8k + 24 = 25 > 0.$$

При любом значении параметра k уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{4k + 1 - 5}{2} = 2k - 2; \qquad x_2 = \frac{4k + 1 + 5}{2} = 2k + 3.$$

649. Сначала выясним, при каких значениях b уравнение имеет корни.

$$D = 4b^2 - 4b + 1 - 4b^2 + 4b + 8 = 9 > 0.$$

При любом значении параметра b уравнение имеет два корня.

Сумма корней уравнения равна $2b - 1$. Найдём, при каких значениях b это выражение равно 7:

$$2b - 1 = 7; \; b = 4.$$

ГЛАВА IV

Неравенства

§ 10. Числовые неравенства и их свойства

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
28	Числовые неравенства	2 (2)
29	Свойства числовых неравенств	2 (2)
30	Сложение и умножение числовых неравенств	2 (2)
31	Погрешность и точность приближения	2 (3)
	Контрольная работа № 7	1

Содержание материала

В данном параграфе учащиеся знакомятся с определением понятий «больше» и «меньше» и его применением при доказательстве неравенств. Рассматривается соотношение между средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим двух положительных чисел. Доказываются теоремы, выражающие свойства числовых неравенств, и показывается их применение для оценки значений выражений. Учащиеся знакомятся с теоремами о сложении и умножении числовых неравенств и их использованием в конкретных случаях. Вводятся понятия абсолютной погрешности и точности приближения. Даётся представление об относительной погрешности.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы познакомить учащихся с алгебраическим истолкованием понятий «меньше» и «больше», систематизировать известные им сведения о свойствах числовых неравенств, продемонстрировать возможность применения этих свойств для оценки значений выражений, а также ввести понятия абсолютной погрешности, точности приближения и относительной погрешности, познакомить учащихся с использованием этих понятий на практике.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны уметь доказывать неравенства, используя определение понятий «меньше», «больше» и теоремы о свойствах числовых неравенств. Формируется также умение учащихся применять теоремы о сложении и умножении неравенств для оценки значений суммы, разности, произведения и частного двух чисел в случаях, когда указаны границы, в которых эти числа заключены. Учащиеся должны уметь использовать в курсе алгебры, а также при изучении смежных дисциплин и в практической деятельности понятия абсолютной погрешности, точности приближения и относительной погрешности приближения.

Методический комментарий

К изучению главы IV учащиеся приступают, владея некоторым запасом знаний о неравенствах. Они знакомы со знаками $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, получили представление о двойных неравенствах. Изложение материала § 10 «Числовые неравенства» начинается с введения определения понятий «меньше» и «больше». Это определение является опорным при сравнении значений выражений, доказательстве неравенств. На первом уроке, отводимом на изучение пункта 28 «Числовые неравенства», можно познакомить учащихся с авторским примером 1 и предложить им для классной и домашней работы некоторые из заданий **724—734**. Полезно остановиться на задании **732**, предназначенном для работы в парах. В нём учащимся в очередной раз предоставляется возможность высказать на основе наблюдения некоторую гипотезу и провести соответствующее доказательство. На следующем уроке можно познакомить учащихся с авторским примером 2, предварительно напомнив определение среднего гармонического двух положительных чисел, и предложить им выполнить некоторые из оставшихся упражнений, в частности упражнение **738**, предназначенное для работы в парах. При наличии времени можно организовать коллективное обсуждение с учащимися задачи **742**. Желательно, чтобы они сначала сформулировали предполагаемый ответ, а потом проверили его правильность, выполнив необходимые преобразования.

В пункте 29 доказываются теоремы 1 и 2 о свойствах асимметричности и транзитивности неравенств (соответствующие термины можно не вводить), а также теоремы 3 и 4 о прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же числа и об умножении обеих частей неравенства на одно и то же положительное или отрицательное число. Эти теоремы составляют основу алгоритма решения линейных неравенств с одной переменной, с которым учащимся предстоит познакомиться в § 11. Учащиеся должны запомнить приведённые в учебнике формулировки теорем 3 и 4 и ссылаться на них при обосновании выбранного способа рассуждений. Предлагаемые в данном пункте упражнения достаточно просты. Рекомендуется специально остановиться на упражнении **756**, предназначенном для работы в парах. Здесь учащиеся должны внимательно отнестись к сравнению значений членов последовательности при условии, что a — положительное число.

В пункте 30 доказываются теоремы о почленном сложении и умножении числовых неравенств. Эти теоремы используются для оценки значений суммы, разности, произведения и частного двух чисел в случаях, когда указаны границы, в которых эти числа заключены. Соответствующие умения вырабатываются при выполнении упражнений **768—778**. Важно остановиться на задании **776**, предназначенном для работы в парах. Здесь учащиеся используют известное им соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел. Рекомендуется обратить внимание учащихся на широкое применение в данном пункте аппарата неравенств для решения задач с геометрическим содержанием. Интерес для учащихся представляет достаточно сложная задача-исследование (упражнение **778**), в которой предлагается сравнить сумму длин медиан треугольника с его периметром. Здесь важно привлечь учащихся к коллективному поиску способа решения задачи под руководством учителя.

Завершает § 10 пункт 31 «Погрешность и точность приближения», имеющий важное прикладное значение. С формируемыми здесь понятиями учащимся неоднократно придётся встречаться при изучении смежных дисциплин и в практической деятельности. Они должны знать определение понятия абсолютной погрешности, понимать смысл высказывания «$x \approx a$ с точностью до h», использовать запись $x = a \pm h$ и переходить от неё к двойному неравенству $a - h \leqslant x \leqslant a + h$. Следует обратить внимание учащихся на то, что если приближённое значение величины найдено путём измерения, то точность приближения зависит от точности прибора, используемого при измерении.

Наряду с понятием абсолютной погрешности вводится понятие относительной погрешности. Учащиеся должны знать, что относительной погрешностью приближённого значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближённого значения. Важно разъяснить им, что на практике абсолютная погрешность приближения часто бывает неизвестна. В таких случаях ограничиваются оценкой относительной погрешности, т. е. указывают число, которое больше относительной погрешности либо равно ей.

Упражнения, включённые в данный пункт, убеждают учащихся в практической значимости приобретённых ими знаний и умений. Рекомендуется организовать коллективное обсуждение ответов к упражнениям **788—795**, полученных учащимися.

На уроках, отводимых на изучение данного параграфа, и на последующих уроках рекомендуется использовать некоторые дополнительные упражнения к § 10. В их число можно включить задания **918—920**, а также задание **928**, в котором представлена старинная задача из книги «Начала» Евклида.

Указания к основным упражнениям учебника

727. Составим и преобразуем разность данных выражений:

$$4b(b+1)-(2b+7)(2b-8)=4b^2+4b-4b^2-14b+16b+56=$$
$$=6b+56.$$

При различных значениях b эта разность может принимать как положительные, так и отрицательные значения или быть равной нулю. Следовательно, нельзя утверждать, что при любом b значение первого выражения больше, чем значение второго.

731. Предварительно следует убедиться в том, что учащиеся твёрдо знают следующий факт: при любых значениях a и b верно неравенство $(a-b)^2 \geqslant 0$.

732. (*Для работы в парах.*) Рассмотрим, например, дробь $\frac{4}{5}$. После прибавления единицы к числителю и знаменателю дроби получим дробь $\frac{5}{6}$, которая больше $\frac{4}{5}$, т. е. дробь увеличилась.

Рассмотрим дробь $\frac{7}{6}$. После прибавления единицы к числителю и знаменателю дроби получим дробь $\frac{8}{7}$, которая меньше $\frac{7}{6}$, следовательно, дробь уменьшилась.

Можно высказать следующую гипотезу: если числитель дроби $\frac{a}{b}$ меньше знаменателя, то после прибавления единицы к её числителю и знаменателю дробь увеличивается, если же числитель дроби $\frac{a}{b}$ больше знаменателя, дробь уменьшается. Докажем это.

Составим разность дробей $\frac{a+1}{b+1}$ и $\frac{a}{b}$ и преобразуем её:

$$\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}=\frac{ab+b-ab-a}{b(b+1)}=\frac{b-a}{b(b+1)}.$$

Если $a<b$, то $b-a>0$ и $\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}>0$; если $a>b$, то $b-a<0$ и $\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}<0$. Гипотеза доказана.

734. В этом упражнении учащиеся должны записать в буквенном виде неравенство, которое следует доказать.

$$a+\frac{1}{a}\geqslant 2, \text{ где } a>0.$$

Рассмотрим разность этих выражений:

$$a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2-2a+1}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}.$$

$\frac{(a-1)^2}{a}\geqslant 0$ при любом положительном значении a. Неравенство верно.

Можно предложить учащимся выяснить, при каком значении a выполняется равенство $a+\frac{1}{a}=2$.

738. (*Для работы в парах.*) Докажем, что если $a^2>b^2$, то при положительных значениях a и b справедливо неравенство $a>b$.

Если $a^2>b^2$, то $a^2-b^2>0$, т. е. $(a-b)(a+b)>0$.

Так как a и b — положительные числа, то $a+b>0$, значит, и $a-b>0$, т. е. $a>b$.

а) Сравним квадраты данных выражений:

$(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=9+2\sqrt{18}$; $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2=9+2\sqrt{14}$;

$2\sqrt{18}>2\sqrt{14}$, следовательно, $(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2>(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$;

$\sqrt{6}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ — положительные числа, значит, $\sqrt{6}+\sqrt{3}>\sqrt{7}+\sqrt{2}$;

г) $(\sqrt{10}-\sqrt{7})^2<(\sqrt{11}-\sqrt{6})^2$, так как $17-2\sqrt{70}<17-2\sqrt{66}$.

Следовательно, $\sqrt{10}-\sqrt{7}<\sqrt{11}-\sqrt{6}$.

740. Преобразуем разность выражений (a^3+b^3) и $ab(a+b)$:

$$a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)=$$
$$=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2.$$

Известно, что $a>0$, $b>0$, $a\neq b$, следовательно, $(a+b)\times$ $\times(a-b)^2>0$, значит, $a^3+b^3>ab(a+b)$.

741. Произведение крайних членов равно $k(k+3)$, а произведение средних членов — $(k+1)(k+2)$. Сравним с нулём разность этих произведений:

$$k(k+3)-(k+1)(k+2)=k^2+3k-(k^2+3k+2)=$$
$$=k^2+3k-k^2-3k-2=-2<0.$$

Следовательно, при любом значении k первое произведение меньше второго.

742. Обозначим через s расстояние от посёлка до станции. Коля затратил на весь путь $\frac{s}{5}$ ч, а Миша — $\left(\frac{s}{2\cdot 5{,}5}+\frac{s}{2\cdot 4{,}5}\right)$ ч. Надо сравнить величины $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{11}+\frac{1}{9}$. Оценим разность этих величин:

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{9}-\frac{1}{5}=\frac{45+55-99}{495}=\frac{1}{495}>0.$$

Следовательно, Миша затратил на дорогу больше времени и первым на станцию пришёл Коля.

748. При ответе на первые три вопроса учащиеся должны сформулировать соответствующую теорему о свойстве неравенств. При ответе на четвёртый вопрос следует предложить учащимся привести примеры.

749. а) Известно, что $a-3>b-3$. Прибавив к обеим частям неравенства число 3, получим $a>b$. Так как $a>b$ и $b>4$, то a и b — положительные числа;

г) известно, что $-2a>-2b$. Разделив обе части неравенства на отрицательное число -2 и поменяв знак неравенства на противоположный, получим $a<b$. Так как $b<-\frac{1}{3}$, то a и b — отрицательные числа.

755. При выполнении этого упражнения учащиеся должны ссылаться на следствие из теоремы 4.

По условию a, b, c, d — положительные числа.

Так как $a>b$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$; так как $c>a$, то $\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$; так как $d<b$, то $\frac{1}{d}>\frac{1}{b}$, т. е. $\frac{1}{b}<\frac{1}{d}$.

Искомая последовательность имеет вид $\frac{1}{c}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{d}$.

756. (*Для работы в парах.*) а) Если $a>0$, то $-a$ — отрицательное число. Остальные четыре числа положительные, их значение возрастает с увеличением коэффициента при переменной a.

Имеем последовательность $-a$, $a\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$, $a\sqrt{3}$, $2a$, $3a$;

б) среди этих чисел два положительных числа: $6a$ и $a(\sqrt{7}-\sqrt{6})$. Остальные три числа отрицательные, значения которых убывают с возрастанием коэффициента при переменной a.

Получаем последовательность $6a,\ a(\sqrt{7}-\sqrt{6}),\ -a,\ -a\sqrt{5},\ -5a-1$.

757. Нужно применить свойства неравенств к двойному неравенству.

б) Умножим все члены неравенства на -1 и поменяем знаки неравенств на противоположные:

$$-3 > -a > -4, \text{ т. е. } -4 < -a < -3;$$

г) прибавим число 5 ко всем членам двойного неравенства $-4 < -a < -3$, получим $1 < 5 - a < 2$.

761. а) Периметр квадрата со стороной a см равен $4a$ см. Умножив все члены данного двойного неравенства на 4, получим $20{,}4 \leqslant 4a \leqslant 20{,}8$.

б) Если периметр квадрата равен P см, то его сторона равна $\frac{P}{4}$ см.

Разделим на 4 все члены двойного неравенства $15{,}6 \leqslant P \leqslant 15{,}8$. Получим $3{,}9 \leqslant \frac{P}{4} \leqslant 3{,}95$.

762. б) Удобно записать границы значений y в виде обыкновенных дробей: $\frac{1}{8} < y < \frac{1}{4}$. Применив следствие из теоремы 4, получим $4 < \frac{1}{y} < 8$.

767. а) Так как $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $a^2 > b^2$, т. е. $a^2 - b^2 > 0$ и $a > 0$, $b > 0$, то $a - b > 0$.

Рассмотрим разность $a^3 - b^3$:

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) > 0$ как произведение двух положительных множителей;

б) из равенства $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ и условия $a^3 > b^3$ следует, что $a - b > 0$. Следовательно,

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) > 0$$

как произведение двух положительных множителей.

768. б) Из неравенства $4 < b < 5$ следует, что $-5 < -b < -4$. Известно, что $3 < a < 4$. Оценим разность $a - b$.

Сложив эти двойные неравенства, получим $-2 < a - b < 0$.

773. а) Периметр прямоугольника со сторонами a и b вычисляется по формуле $P = 2a + 2b$. Сложив двойные неравенства $10{,}8 < 2a < 11{,}0$ и $7{,}2 < 2b < 7{,}4$, получим $18{,}0 < P < 18{,}4$;

б) площадь прямоугольника со сторонами a и b вычисляется по формуле $S = ab$. Перемножив двойные неравенства $5{,}4 < a < 5{,}5$ и $3{,}6 < b < 3{,}7$, получим $19{,}44 < S < 20{,}35$.

774. Оценим площадь комнаты, т. е. произведение ab:

$$\begin{array}{c} 7{,}5 \leqslant a \leqslant 7{,}6 \\ \underline{5{,}4 \leqslant b \leqslant 5{,}5} \\ 40{,}5 \leqslant ab \leqslant 41{,}8. \end{array}$$

Так как $ab > 40$, то помещение подходит для библиотеки.

775. Пусть γ — третий угол треугольника, тогда $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. Оценим сначала сумму $\alpha + \beta$:

$$\begin{array}{c} 58° \leqslant \alpha \leqslant 59° \\ \underline{102° \leqslant \beta \leqslant 103°} \\ 160° \leqslant \alpha + \beta \leqslant 162°. \end{array}$$

Затем оценим значение выражения $-(\alpha + \beta)$:

$$-162° \leqslant -(\alpha + \beta) \leqslant -160°.$$

Прибавим 180° ко всем членам этого двойного неравенства: $18° \leqslant \gamma \leqslant 20°$.

776. (*Для работы в парах.*) а) Воспользуемся соотношениями

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}; \quad \frac{a+c}{2} \geqslant \sqrt{ac}; \quad \frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}.$$

Перемножив эти неравенства, получим

$$\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{8} \geqslant \sqrt{a^2 b^2 c^2}.$$

По условию $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, значит, $\sqrt{a^2 b^2 c^2} = abc$. Следовательно,

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 8abc;$$

б) для того чтобы доказать данное неравенство, перемножим четыре неравенства:

$$\frac{a+1}{2} \geqslant \sqrt{a}; \quad \frac{b+1}{2} \geqslant \sqrt{b}; \quad \frac{a+c}{2} \geqslant \sqrt{ac}; \quad \frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}.$$

Получим

$$\frac{(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)}{16} \geqslant \sqrt{a^2 b^2 c^2}.$$

Так как $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2 b^2 c^2} = abc$. Следовательно,

$$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geqslant 16abc.$$

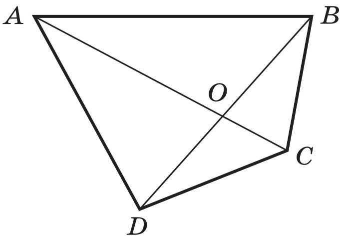


Рис. 9

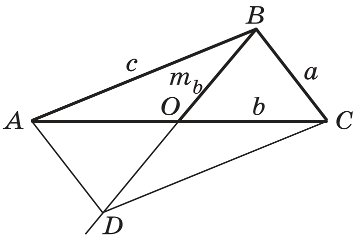


Рис. 10

777. Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$ (рис. 9). AC и BD — его диагонали, O — точка их пересечения.

Для треугольника AOD имеем неравенство $AD < AO + OD$, для треугольника BOC — $BC < BO + OC$. Сложив эти неравенства, получим

$$AD + BC < AO + BO + OD + OC, \text{ т. е. } AD + BC < AC + BD.$$

Аналогично доказывается, что $AB + DC < AC + BD$.

778. (*Задача-исследование.*) Проведём медиану BO треугольника ABC и продолжим луч BO, отложив на нём отрезок $OD = BO$. Соединим точку D с точками A и C (рис. 10). Полученный четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, так как его диагонали при пересечении делятся пополам. Введём обозначения: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $BO = m_b$. Тогда $BD = 2m_b$.

По неравенству треугольника для треугольника ABD имеем

$$2m_b < BC + AB, \text{ т. е. } 2m_b < a + c.$$

Аналогично можно доказать, что

$$2m_a < b + c, \quad 2m_c < a + b,$$

где m_a и m_c — медианы, проведённые к сторонам a и c соответственно.

Сложив три неравенства, получим

$$2m_b + 2m_c + 2m_a < 2a + 2b + 2c, \text{ т. е. } m_b + m_c + m_a < a + b + c.$$

Итак, сумма медиан треугольника меньше его периметра.

787. Вычислим 3 % от 420: $420 \cdot 0{,}03 = 12{,}6$ (г).

Значит, можно записать двойное неравенство для числа a:

$$420 - 12{,}6 \leqslant a \leqslant 420 + 12{,}6, \text{ т. е. } 407{,}4 \leqslant a \leqslant 432{,}6.$$

789. По условию задачи $m = 32 \pm 1$, т. е. $31 \leqslant m \leqslant 33$.

В заданиях «а» и «б» следует дать положительный ответ, а в заданиях «в» и «г» — отрицательный.

792. Округлим число 2,525 до 0,1: $2{,}525 \approx 2{,}5$.

Найдём относительную погрешность приближённого значения: $\dfrac{2{,}525-2{,}5}{2{,}5}\cdot 100\,\% = \dfrac{0{,}025}{2{,}5}\cdot 100\,\% = 1\,\%$.

793. Найдём сначала абсолютную погрешность приближённого значения: $|7{,}6-7{,}8| = 0{,}2$.

Относительная погрешность равна $\dfrac{0{,}2}{7{,}6}\cdot 100\,\% \approx 2{,}6\,\%$.

794. Относительная погрешность данного приближения равна $\dfrac{0{,}1}{510{,}2}\cdot 100\,\% \approx 0{,}02\,\%$.

При решении этой задачи рекомендуется воспользоваться калькулятором.

795. Найдём относительную погрешность каждого из этих измерений:

$$\frac{0{,}01}{0{,}15}\cdot 100\,\% = \frac{1}{15}\cdot 100\,\% \approx 6{,}67\,\%; \qquad \frac{500}{384000}\cdot 100\,\% \approx 0{,}13\,\%.$$

Так как $0{,}13\,\% < 6{,}67\,\%$, то качество второго измерения выше.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

917. а) Каждая из данных сумм — положительное число. Сравним их квадраты:

$$(\sqrt{7}+2\sqrt{5})^2 = 27+4\sqrt{35}; \qquad (2+\sqrt{35})^2 = 39+4\sqrt{35};$$

$$27+4\sqrt{35} < 39+4\sqrt{35}.$$

Следовательно, $\sqrt{7}+2\sqrt{5} < 2+\sqrt{35}$.

918. Преобразуем разность данных выражений:

а) $a^2+b^2+2-2(a+b) = a^2-2a+1+b^2-2b+1 = (a-1)^2+(b-1)^2 \geqslant 0$ при любых значениях a и b.

919. б) Преобразуем сначала сумму дробей, стоящую в скобках:

$$\frac{1}{y^2-y}+\frac{y-3}{y^2-1} = \frac{1}{y(y-1)}+\frac{y-3}{(y-1)(y+1)} = \frac{y^2-2y+1}{y(y-1)(y+1)} = \frac{y-1}{y(y+1)}.$$

Имеем

$$\frac{y^2+3}{y-1}-\frac{2}{y}:\frac{y-1}{y(y+1)} = \frac{y^2+3}{y-1}-\frac{2(y+1)}{y-1} = \frac{y^2-2y+1}{y-1} = y-1.$$

Так как $y>1$, то $y-1>0$.

920. Если скорость катера x км/ч, а скорость течения y км/ч, то в первом случае время, затраченное катером на весь путь, равно $\left(\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}\right)$ ч, а во втором случае — $\frac{40}{x}$ ч.

Составим и преобразуем разность этих выражений:

$$\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}-\frac{40}{x}=\frac{40x}{x^2-y^2}-\frac{40}{x}=\frac{40x^2-40(x^2-y^2)}{x(x^2-y^2)}=\frac{40y^2}{x(x^2-y^2)}.$$

По условию задачи $x>0$, $y>0$ и $x>y$, значит, $40y^2>0$ и $x(x-y)(x+y)>0$, следовательно, значение дроби $\frac{40y^2}{x(x^2-y^2)}$ положительно.

Получаем, что больше времени будет затрачено катером на прохождение 20 км по течению и 20 км против течения.

921. (*Задача-исследование.*) Составим формулы для вычисления времени t_1 и t_2, затраченного лодкой на весь путь в каждый из дней: $t_1=\frac{s}{x+y}+\frac{s}{x-y}$; $\quad t_2=\frac{s}{x+z}+\frac{s}{x-z}$.

Известно, что $y<z$. Составим разность t_2-t_1 и преобразуем её:

$$t_2-t_1=\frac{s}{x+z}+\frac{s}{x-z}-\left(\frac{s}{x+y}+\frac{s}{x-y}\right)=s\left(\frac{1}{x+z}-\frac{1}{x+y}\right)+$$

$$+s\left(\frac{1}{x-z}-\frac{1}{x-y}\right)=s\cdot\frac{y-z}{(x+z)(x+y)}+s\cdot\frac{z-y}{(x-z)(x-y)}=$$

$$=\frac{s(z-y)\cdot 2x(z+y)}{(x+z)(x+y)(x-z)(x-y)}.$$

Значение этой дроби положительно, следовательно, во второй день лодка затратила на весь путь больше времени, чем в первый.

923. Обозначим длины сторон треугольника через a, b и c. Так как каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, то $a<b+c$.

Прибавив a к обеим частям неравенства, получим $2a<a+b+c$, отсюда $\frac{a+b+c}{2}>a$. Аналогично доказывается, что $\frac{a+b+c}{2}>b$ и $\frac{a+b+c}{2}>c$.

924. Пусть сторона квадрата равна x см, тогда его площадь равна x^2 см^2, а периметр равен $4x$ см. Обозначим стороны прямоугольника через a см и b см ($a\neq b$), тогда его площадь равна ab см^2, а периметр равен $2(a+b)$ см.

Известно, что $4x = 2(a + b)$, т. е. $x = \frac{a+b}{2}$. Надо сравнить $\frac{(a+b)^2}{4}$ и ab. Преобразуем разность:

$$\frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Так как $\frac{(a-b)^2}{4} > 0$ при любых значениях a, b $(a \neq b)$, то площадь квадрата больше площади прямоугольника, имеющего тот же периметр.

926. б) Преобразуем разность:

$$\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{a^3 + b^3}{a^2b^2} - \frac{a+b}{ab} =$$

$$= \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)}{a^2b^2} = \frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2}.$$

Так как $a > 0$ и $b > 0$, то $a + b > 0$ и $\frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2} \geqslant 0$. Неравенство верно.

927. а) Используя соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел ac и $\frac{b}{c}$, получим $\frac{ac + \frac{b}{c}}{2} \geqslant \sqrt{ac \cdot \frac{b}{c}}$; $ac + \frac{b}{c} \geqslant 2\sqrt{ab}$;

б) применим соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим к каждой сумме:

$$1 + \frac{a^2}{bc} \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{bc}}; \qquad 1 + \frac{b^2}{ac} \geqslant 2\sqrt{\frac{b^2}{ac}}; \qquad 1 + \frac{c^2}{ab} \geqslant 2\sqrt{\frac{c^2}{ab}}.$$

Отсюда $\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(1 + \frac{b^2}{ac}\right)\left(1 + \frac{c^2}{ab}\right) \geqslant 8.$

928. В пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где a, b, c, d — положительные числа, a — наибольшее число. Следовательно, $a > b$, а, значит, $c > d$. Поменяем в пропорции местами средние члены и вычтем 1 из обеих её частей, получим

$$\frac{a}{c} - 1 = \frac{b}{d} - 1 \text{ или } \frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}.$$

Предположим, что $a - c \leqslant b - d$, тогда $\frac{a-c}{c} < \frac{b-d}{d}$, так как $c > d$, что противоречит полученному равенству. Значит, $a - c > b - d$. Отсюда $a + d > b + c$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 25

8. а) Рассмотрим разность выражений, стоящих в левой и правой частях неравенства:

$4a^2 + a - (2a - 11)(11 + 2a) - a = 4a^2 + a - 4a^2 + 121 - a = 121 > 0.$

Следовательно, неравенство верно при любом значении a;

б) рассмотрим разность:

$9a(a + 2) - (3a + 4)^2 + 31 = 9a^2 + 18a - 9a^2 - 24a - 16 + 31 = -6a + 15.$

Данное выражение при различных значениях a может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, неравенство не является верным при любом значении a.

10. Можно взять, например, значение p, равное 4,3. Неравенству $3{,}9 < x < 4{,}3$ удовлетворяет единственное целое число 4.

В качестве p можно взять любое значение из интервала $4 < p < 5$;

б) возьмём, например, значение p, равное 5,2. Неравенству $3{,}9 < x < 5{,}2$ удовлетворяют только два целых числа: 4 и 5.

В качестве p можно взять любое значение из интервала $5 < p < 6$;

в) возьмём, например, значение p, равное 3,94. Неравенству $3{,}9 < x < 3{,}94$ не удовлетворяет ни одно целое число.

В качестве p можно взять любое значение из интервала $3{,}9 < p < 4$.

13. а) Обозначим пропущенное число через z.

$$x^2 - 6x + y^2 - 10y + z > 0.$$

Дополним каждый из двучленов $x^2 - 6x$ и $y^2 - 10y$ до полного квадрата:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 - 34 + z = (x - 3)^2 + (y - 5)^2 - 34 + z.$$

Для того чтобы значение этой суммы было положительным при любых значениях x и y, надо взять $z > 34$, например $z = 40$.

14. а) Преобразуем левую часть данного неравенства, используя выделение полного квадрата:

$$81x^2 + 9y^2 + 36x - 6y + 10 = 81x^2 + 36x + 4 + 9y^2 - 6y + 1 + 5 = (9x + 2)^2 + (3y - 1)^2 + 5.$$

Эта сумма положительна при любых значениях x и y.

15. Пусть скорость лодки при движении по озеру равна x км/ч, а скорость течения реки равна y км/ч. Задача сводится к сравнению суммы $\frac{40}{x+y}+\frac{40}{x-y}$ с дробью $\frac{80}{x}$.

Преобразуем разность

$$\frac{40}{x+y}+\frac{40}{x-y}-\frac{80}{x}=\frac{80x}{x^2-y^2}-\frac{80}{x}=\frac{80x^2-80x^2+80y^2}{x(x^2-y^2)}=$$
$$=\frac{80y^2}{x(x-y)(x+y)}.$$

Так как $x>0$, $y>0$ и $x>y$, то $\frac{80y^2}{x(x-y)(x+y)}>0$.

Значит, лодка больше времени затратила в первый день.

П у н к т 26

8. Так как x — отрицательное число, то числа $-x$ и $-x\sqrt{3}$ — положительные, значит, $-x<-x\sqrt{3}$. Остальные три числа отрицательные, их значения возрастают с уменьшением значения коэффициента при переменной x. Наименьшим отрицательным числом является $4x$. Учитывая, что $\sqrt{5}-\sqrt{2}<3$, получаем такую последовательность чисел:

$$4x,\ 3x,\ x\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right),\ -x,\ -x\sqrt{3}.$$

12. По условию $a<b$, следовательно, $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$;

$d>b$, следовательно, $\frac{1}{d}<\frac{1}{b}$, т. е. $\frac{1}{b}>\frac{1}{d}$;

$c<a$, следовательно, $\frac{1}{c}>\frac{1}{a}$.

Имеем $\frac{1}{c}>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{d}$.

П у н к т 27

7. Объём куба вычисляется по формуле $V=a^3$, где a — сторона куба. Чтобы оценить объём куба, надо возвести в куб все члены двойного неравенства $1{,}3\leqslant a\leqslant 1{,}4$.

Получим $2{,}197\leqslant V\leqslant 2{,}744$ или, округляя, $2{,}2\leqslant V\leqslant 2{,}8$.

Площадь поверхности куба вычисляется по формуле $S=6a^2$. Сначала оценим значение выражения a^2:

$$1{,}69\leqslant a^2\leqslant 1{,}96.$$

Следовательно, $6\cdot 1{,}69\leqslant S\leqslant 6\cdot 1{,}96$; $10{,}14\leqslant S\leqslant 11{,}76$.

10. Пусть x, y, z — положительные числа и $xyz = 9$. Имеем соотношения

$$1 + x > 2\sqrt{x}; \quad 1 + y > 2\sqrt{y}; \quad 1 + z > 2\sqrt{z}.$$

Перемножив эти неравенства, получим

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) > 8\sqrt{xyz}.$$

Так как $xyz = 9$, то $8\sqrt{xyz} = 8\sqrt{9} = 24$. Следовательно,

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) > 24.$$

П у н к т 28

7. Среднее арифметическое чисел a и b равно $\frac{a+b}{2}$. Имеем

$$\left|\frac{a+b}{2} - a\right| = \left|\frac{a+b-2a}{2}\right| = \frac{|b-a|}{2}; \quad \left|\frac{a+b}{2} - b\right| = \left|\frac{a+b-2b}{2}\right| = \frac{|a-b|}{2}.$$

Точность приближения в обоих случаях одна и та же.

8. Относительная погрешность приближения при измерении длины стержня равна $\frac{0{,}1}{17{,}9} \cdot 100\,\% \approx 0{,}6\,\%$.

Относительная погрешность приближения при измерении диаметра поперечного сечения равна $\frac{0{,}05}{3{,}1} \cdot 100\,\% \approx 1{,}6\,\%$.

Так как $0{,}6\,\% < 1{,}6\,\%$, то качество измерения выше в первом случае.

9. Оценим площадь первой комнаты, перемножив неравенства $7{,}6 \leqslant a \leqslant 7{,}8$ и $6{,}1 \leqslant b \leqslant 6{,}3$. Получим $46{,}36 \leqslant ab \leqslant 49{,}14$.

Оценим площадь второй комнаты, перемножив неравенства $8{,}1 \leqslant c \leqslant 8{,}3$ и $5{,}6 \leqslant d \leqslant 5{,}8$. Получим $45{,}36 \leqslant cd \leqslant 48{,}14$.

Сложим полученные двойные неравенства:

$$91{,}72 \leqslant ab + cd \leqslant 97{,}28.$$

Помещение, состоящее из этих двух комнат, подойдёт для офиса фирмы.

11. Решим квадратное уравнение $x^2 = 12 - x$:

$$x^2 + x - 12 = 0; \; x_1 = -4; \; x_2 = 3.$$

Абсолютная погрешность при нахождении первого корня графическим способом составляет $|-4 - (-3{,}8)| = 0{,}2$, а при нахождении второго корня — $|3 - 2{,}7| = 0{,}3$.

В первом случае относительная погрешность равна $\frac{0{,}2}{3{,}8} \cdot 100\,\% \approx 5{,}3\,\%$, а во втором случае — $\frac{0{,}3}{2{,}7} \cdot 100\,\% \approx 11{,}1\,\%$.

§ 11. Неравенства с одной переменной и их системы

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
32	Пересечение и объединение множеств	1 (2)
33	Числовые промежутки	2 (2)
34	Решение неравенств с одной переменной	5 (5)
35	Решение систем неравенств с одной переменной	3 (4)
	Контрольная работа № 8	1

Содержание материала

Основное содержание данного параграфа составляют алгоритмы решения неравенств, сводящихся к линейным, и систем таких неравенств. К усвоению этих алгоритмов учащихся готовят вводимые в данном параграфе понятия пересечения и объединения множеств, а также сведения о названиях и обозначениях различных числовых промежутков. Вводится понятие равносильных неравенств и рассматриваются условия перехода от одного неравенства к другому, ему равносильному. На конкретных примерах разъясняются алгоритмы решения неравенств с одной переменной, сводящихся к линейным, и систем таких неравенств.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы расширить запас знаний учащихся о множествах, ознакомить их с различными видами числовых промежутков и соответствующими обозначениями, сформировать умения решать линейные неравенства с одной переменной и системы таких неравенств.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Учащиеся должны уметь находить в несложных ситуациях пересечение и объединение множеств, иллюстрировать с помощью кругов Эйлера соотношение между некоторыми числовыми множествами. Они овладевают также умением изображать на координатной прямой основные числовые промежутки: числовой отрезок, интервал, полуинтервал, числовой луч, открытый числовой луч. Формируется умение учащихся решать неравенства с одной переменной, сводящиеся к линейным, используя для этого свойства равносильности неравенств. Учащиеся овладевают также умением решать системы неравенств, сводящихся к линейным, находить в несложных случаях множество решений двойного неравенства с одной переменной.

Методический комментарий

Изучение данного параграфа начинается с введения понятий пересечения и объединения множеств. Содержание этих понятий раскрывается на простейших примерах. Учащиеся должны усвоить соответствующие определения, ссылаться на них при выполнении упражнений и научиться пользоваться введёнными обозначениями. Усвоению понятий пересечения и объединения множеств способствует привлечение наглядных иллюстраций при помощи специальных схем, называемых кругами Эйлера. В связи с рассмотрением вопроса о пересечении множеств, не имеющих общих элементов, вводится понятие пустого множества и соответствующее обозначение. Следует специально остановиться на упражнении **807**, предназначенном для работы в парах. При проверке его выполнения полезно обратить внимание учащихся на принципиальное различие случаев, с которыми они встречаются в заданиях «а» и «б».

В пункте 33 учащиеся знакомятся с достаточно большим количеством понятий и символов. Облегчить их усвоение помогает таблица, в которой приведены названия и обозначения числовых промежутков разного вида, показано их изображение на координатной прямой. Усвоению новых сведений способствуют упражнения **812—824**. Тем самым закладывается база для рассмотрения на последующем уроке авторских примеров 1 и 2, приведённых в пункте 33, и выполнения учащимися некоторых из заданий **825—828**, в которых находят применение введённые ранее понятия пересечения и объединения множеств.

В пункте 34 учащиеся знакомятся с алгоритмом решения неравенств с одной переменной, сводящихся к линейным. Вводятся понятия решения неравенства и равносильных неравенств. Формулируются и разъясняются на примере условия перехода от одного неравенства к другому, ему равносильному. После этого учащиеся могут приступить к выполнению упражнений **833—837**. Важно предостеречь их от распространённой ошибки, когда, решая неравенство вида $ax > b$ или $ax < b$ с отрицательным коэффициентом a, они делят обе части неравенства на число a, забывая при этом изменить знак неравенства на противоположный.

На этом и последующем уроках можно ознакомить учащихся с авторскими примерами 1, 2 и 4 и предложить им выполнить некоторые из упражнений **838—848**. Третий из уроков, отводимых на изучение пункта 34, можно посвятить ознакомлению учащихся с решением неравенств, содержащих дроби с числовыми знаменателями. После рассмотрения авторского примера 3 можно предложить учащимся выполнить некоторые из заданий **849—857**. Заключительные два урока, отводимые на изучение пункта 34, можно посвятить выполнению усложнённых заданий **858—869**, иллюстрирующих возможности применения неравенств с одной переменной для решения широкого круга задач.

Завершает изучение § 11 пункт 35, в котором учащиеся знакомятся с решением систем, составленных из неравенств с одной переменной, сводящихся к линейным. В авторских примерах 1—4 демонстрируется достаточно простой способ решения таких систем: предлагается каждое из неравенств, входящих в систему, заменить равносильным ему простейшим неравенством вида $x > a$ или $x < a$, где a — некоторое число, изобразить на рисунке множество решений каждого из неравенств, после чего найти пересечение этих множеств. При выполнении упражнений от учащихся требуется, как обычно, достаточное внимание и аккуратность. Рекомендуется специально остановиться на авторском примере 5 и ознакомить учащихся с удобной формой записи, когда при решении двойного неравенства используется последовательный переход от одного двойного неравенства к другому, ему равносильному. Формированию соответствующего умения способствуют упражнения **892—895**. Заметим, что умение решать системы, составленные из трёх линейных неравенств с одной переменной, выходит за рамки обязательных требований, предъявляемых к учащимся.

Из дополнительных упражнений к § 11 рекомендуется использовать текстовые задачи **949—952**, **962**, **963**.

Указания к основным упражнениям учебника

807. (*Для работы в парах.*) а) Обозначим через C пересечение множеств A и B ($A \cap B = C$), а через D — объединение этих множеств ($A \cup B = D$), тогда

C — множество целых чисел, кратных 15;

D — множество, состоящее из целых чисел, кратных 3, и целых чисел, кратных 5, но не кратных 3.

Можно дать другое описание множества D: D — множество, состоящее из целых чисел, кратных 5, и целых чисел, кратных 3, но не кратных 5;

б) всякое целое число, кратное 15, кратно 3, поэтому $A \cap B = A$; $A \cup B = B$.

819. Приближённые значения корней учащиеся могут найти с помощью калькулятора. Заметим, что значение $\sqrt{6}$ надо взять с точностью до 0,01.

а) $\sqrt{2} \approx 1{,}4$; б) $\sqrt{3} \approx 1{,}7$; в) $\sqrt{5} \approx 2{,}2$; г) $\sqrt{6} \approx 2{,}45$.

Интервалу (1,5; 2,4) принадлежат числа $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$.

820. Приведём дроби $\frac{1}{9}$ и $\frac{1}{6}$ к общему знаменателю 54: $\frac{1}{9} = \frac{6}{54}$; $\frac{1}{6} = \frac{9}{54}$.

Отрезку $\left[\frac{1}{9}; \frac{1}{6}\right]$ принадлежат четыре дроби со знаменателем 54:

$$\frac{6}{54},\ \frac{7}{54},\ \frac{8}{54} \text{ и } \frac{9}{54}.$$

824. Число 1,98 принадлежит промежутку $(-\infty; 2)$. Этому промежутку принадлежат, например, числа 1,99 и 1,993. Наибольшего числа, принадлежащего промежутку $(-\infty; 2)$, не существует. В этом промежутке не существует и наименьшего числа.

825. Это упражнение готовит учащихся к решению систем неравенств.

836—837. При решении неравенств вида $ax > b$ и $ax < b$ важно обратить внимание учащихся на случаи, когда коэффициент a является отрицательным числом.

855. б) Здесь удобно заменить неравенство равносильным неравенством с целыми коэффициентами при переменных.

$$x - \frac{2x+3}{2} \leqslant \frac{x-1}{4};\ 4x - 4x - 6 \leqslant x - 1;\ x \geqslant -5;\ x \in [-5; +\infty).$$

857. а) $31(2x+1) - 12x > 50x$;

$62x + 31 - 12x > 50x$; $\quad 50x + 31 > 50x$.

Неравенство верно при любом значении x;

б) $x + 4 - \frac{x}{3} < \frac{2x}{3}$;

$3x + 12 - x < 2x$; $\quad 2x - 2x < -12$; $\quad 0 \cdot x < -12$.

Неравенство не имеет решений.

859. Выполнение данного упражнения сводится к решению неравенств.

г) Выражение $\sqrt{\frac{7-5a}{8}}$ имеет смысл при $7 - 5a \geqslant 0$, т. е. при $a \leqslant 1{,}4$.

860. а) Областью определения функции является множество значений x, удовлетворяющих условиям:

$$7 - 14x \geqslant 0 \text{ и } x + 8 \neq 0, \text{ т. е. } x \leqslant 0{,}5 \text{ и } x \neq -8.$$

Областью определения функции является объединение двух множеств: $(-\infty; -8) \cup (-8; 0{,}5]$;

б) областью определения функции является множество значений x, удовлетворяющих условиям:

$$4 - x \geqslant 0 \text{ и } \sqrt{4 - x} \neq 1, \text{ т. е. } x \leqslant 4 \text{ и } x \neq 3.$$

Областью определения функции является объединение промежутков: $(-\infty;\ 3) \cup (3;\ 4]$.

861. а) Решим неравенство

$$1{,}6 - (3 - 2y) < 5; \quad 1{,}6 - 3 + 2y < 5; \quad y < 3{,}2.$$

Наибольшее целое число, удовлетворяющее этому неравенству, равно 3;

б) решим неравенство

$$8(6 - y) < 24{,}2 - 7y; \quad 48 - 8y < 24{,}2 - 7y; \quad y > 23{,}8.$$

Наименьшее целое число, удовлетворяющее этому неравенству, равно 24.

862. б) Решением неравенства $(-27{,}1 + 3n) + (7{,}1 + 5n) < 0$ является промежуток $(-\infty;\ 2{,}5)$. Существует два натуральных числа, принадлежащие этому промежутку: 1 и 2.

863. При $a = -5$ уравнение становится линейным и имеет единственный корень $x = 5$.

Уравнение $(a + 5)x^2 + 4x - 20 = 0$ при $a \neq -5$ не имеет корней, если значение его дискриминанта отрицательно.

$$D_1 = 4 + 20(a + 5) = 104 + 20a.$$
$$104 + 20a < 0; \ a < -5{,}2.$$

Уравнение не имеет корней, если $a \in (-\infty;\ -5{,}2)$.

Заметим, что значение $a = -5$ в этот интервал не входит.

864. При $k = 4$ уравнение становится линейным и имеет единственный корень $x = 1{,}5$.

Уравнение $(k - 4)x^2 + 16x - 24 = 0$ при $k \neq 4$ имеет два корня, если значение его дискриминанта положительно.

$$D_1 = 64 + 24(k - 4) = 24k - 32.$$
$$24k - 32 > 0; \quad k > 1\frac{1}{3}.$$

Из промежутка $\left(1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$ надо исключить значение k, равное 4. Получим ответ: $\left(1\frac{1}{3};\ 4\right) \cup (4;\ +\infty)$.

866. Пусть x дм — высота параллелепипеда, тогда его объём равен $(12 \cdot 5 \cdot x)$ дм^3, а объём куба с ребром 9 дм равен 729 дм^3. Решим неравенство

$$12 \cdot 5 \cdot x < 729; \quad x < 12{,}15.$$

Значит, высота параллелепипеда должна быть меньше 12,15 дм.

868. Пусть сумма денежного перевода равна x р., тогда посетитель должен уплатить за перевод $(x+0{,}05x+7)$ р. Решим неравенство

$$x+0{,}05x+7\leqslant 800;\quad 1{,}05x\leqslant 793;\quad x\leqslant \frac{793\cdot 20}{21};\ x\leqslant 755\frac{5}{21}.$$

Следовательно, наибольшее целое число рублей составляет сумма 755 р.

869. Предположим, что туристы могут отъехать на x км, тогда время, затраченное ими на путь по течению реки, равно $\frac{x}{18+2}$ ч, а против течения реки — $\frac{x}{18-2}$ ч. Решим неравенство

$$\frac{x}{20}+\frac{x}{16}\leqslant 3;\quad 4x+5x\leqslant 240;\quad x\leqslant 26\frac{2}{3}.$$

Значит, расстояние не должно превышать $26\frac{2}{3}$ км.

881. г) $\begin{cases}25-6x\leqslant 4+x,\\ 3x+7{,}7>1+4x;\end{cases}$ $\begin{cases}25-4\leqslant x+6x,\\ 7{,}7-1>4x-3x;\end{cases}$ $\begin{cases}x\geqslant 3,\\ x<6{,}7.\end{cases}$

Получаем ответ: $x\in[3;\ 6{,}7)$.

883. а) Упражнение сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases}3-2x\geqslant 0,\\ 1-x\geqslant 0,\end{cases}\ \text{отсюда}\ \begin{cases}x\leqslant 1{,}5,\\ x\leqslant 1.\end{cases}$$

Значит, допустимыми являются значения x, удовлетворяющие неравенству $x\leqslant 1$.

884. а) Для того чтобы найти область определения данной функции, следует решить систему

$$\begin{cases}x+6\geqslant 0,\\ 2x-5\geqslant 0,\\ \sqrt{x+6}-\sqrt{2x-5}\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x\geqslant -6,\\ x\geqslant 2{,}5,\\ x+6\neq 2x-5;\end{cases}\quad \begin{cases}x\geqslant 2{,}5,\\ x\neq 11.\end{cases}$$

Из промежутка $[2{,}5;\ +\infty)$ надо исключить значение x, равное 11. Итак, областью определения данной функции является объединение промежутков $[2{,}5;\ 11)\cup(11;\ +\infty)$.

887. г) $\begin{cases}3-4x<15,\\ 1-2x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}4x>-12,\\ 2x<1;\end{cases}$ $\begin{cases}x>-3,\\ x<\frac{1}{2}.\end{cases}$

Решением системы является интервал $(-3;\ 0{,}5)$. Этому интервалу принадлежат целые числа -2, -1 и 0.

889. а) $\begin{cases} 2{,}5a - 4 + 0{,}5a < a + 1{,}6, \\ 3a - 1{,}5 - 2a < a + 2{,}9; \end{cases}$ $\begin{cases} a < 2{,}8, \\ 0 \cdot a < 4{,}4. \end{cases}$

Так как неравенство $0 \cdot a < 4{,}4$ верно при любом значении a, то решение системы совпадает с решением первого неравенства, т. е. $a \in (-\infty;\ 2{,}8)$;

б) $\begin{cases} 3{,}5a + 0{,}7 - 0{,}5 - 0{,}5a < 3a, \\ 2a - a + 1{,}7 > 6{,}7; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \cdot a < -0{,}2, \\ a > 5. \end{cases}$

Так как неравенство $0 \cdot a < -0{,}2$ не имеет решений, то и система решений не имеет.

894. г) $-2 < \frac{4x-1}{3} \leqslant 0;\ -6 < 4x - 1 \leqslant 0;\ -1\frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{4}.$

Множеством решений неравенства является промежуток $\left(-1\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right]$.

896. Уравнение $x^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$ имеет два корня, если его дискриминант положителен: $D_1 = a^2 - a^2 + 4 = 4 > 0$.

Корни уравнения находим по формуле корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом:

$$x_{1,2} = -a \pm \sqrt{D_1};\ x_1 = -a - 2;\ x_2 = -a + 2.$$

Эти корни должны удовлетворять системе двух двойных неравенств:

$$\begin{cases} -6 < -a - 2 < 6, \\ -6 < -a + 2 < 6; \end{cases} \quad \begin{cases} -8 < a < 4, \\ -4 < a < 8; \end{cases}$$

$$-4 < a < 4, \text{ т. е. } a \in (-4;\ 4).$$

897. Найдём дискриминант квадратного уравнения:

$$D_1 = 9b^2 - 9b^2 + 16 = 16 > 0.$$

Уравнение имеет два корня: $x_1 = 3b - 4;\ x_2 = 3b + 4$.

Для ответа на вопрос задания достаточно решить неравенство $3b + 4 < 0$. Имеем $b < -1\frac{1}{3}$, т. е. $b \in \left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right)$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

937. а) Пересечением этих множеств является множество целых положительных чисел, т. е. множество натуральных чисел, а объединением — множество, состоящее из всех положительных чисел, нуля и целых отрицательных чисел;

б) пересечением этих множеств является множество простых чисел, за исключением числа 2, а объединением является множество, состоящее из числа 2 и всех нечётных натуральных чисел.

943. б) Решив неравенство $(x+1)(x-1)-(x^2-3x)\leqslant 14$, найдём $x\leqslant 5$. Этому неравенству удовлетворяют натуральные числа 1, 2, 3, 4 и 5.

948. б) $\dfrac{|12-6m|}{12-6m}=1$ — это равенство означает, что $12-6m>0$, т. е. $m<2$;

г) $\dfrac{|10m-35|}{10m-35}=-1$ — это равенство означает, что $10m-35<$ <0, т. е. $m<3{,}5$.

950. Пусть x — искомое количество железных болванок, тогда количество медных болванок равно $(12-x)$. Выразим вес болванок в тоннах: 500 кг $=0{,}5$ т; 200 кг $=0{,}2$ т.

Решим неравенство $0{,}5x+0{,}2(12-x)\leqslant 4$; $x\leqslant 5\frac{1}{3}$.

Значит, может быть не больше 5 железных болванок.

951. Первому туристу надо затратить на весь путь 6 ч, а с момента выхода второго туриста ему остаётся идти 4 ч. Второй турист, чтобы догнать первого до его прихода в город, должен за 4 ч пройти более 24 км. Пусть скорость второго туриста равна x км/ч. Из неравенства $4x>24$ находим, что $x>6$. Значит, скорость второго туриста должна быть более 6 км/ч.

952. Велосипедист прибудет на станцию через $3\frac{1}{3}$ ч. Пусть скорость мотоциклиста равна x км/ч, тогда за $3\frac{1}{3}$ ч он проедет $3\frac{1}{3}x$ км, что должно быть более 60 км. Из неравенства $3\frac{1}{3}x>60$ находим, что $x>18$. Значит, скорость мотоциклиста должна быть более 18 км/ч.

953. Пусть боковая сторона равнобедренного треугольника равна x см, тогда его периметр равен $(20+2x)$ см. Имеем неравенство $20+2x\leqslant 46$, отсюда $x\leqslant 13$.

В каждом треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон. Из неравенства $20<2x$ находим, что $x>10$.

Итак, $x\in(10;\,13]$. В этом промежутке три целых числа: 11, 12 и 13. Значит, боковая сторона треугольника может быть равна 11 см, 12 см или 13 см.

955. б) $\begin{cases} 0{,}7x-3(0{,}2x+1)\leqslant 0{,}5x+1, \\ 0{,}3(1-x)+0{,}8x\geqslant x+5{,}3; \end{cases}$

$$\begin{cases} 0{,}1x-3\leqslant 0{,}5x+1, \\ 0{,}3+0{,}5x\geqslant x+5{,}3; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}4x\geqslant -4, \\ 0{,}5x\leqslant -5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geqslant -10, \\ x\leqslant -10. \end{cases}$$

Решением данной системы является число -10.

957. в) Для ответа на вопрос этого задания следует решить двойное неравенство $-1<-\frac{1}{3}x+8<1$. Имеем

$$-3<-x+24<3; \quad -27<-x<-21; \quad 21<x<27,$$

т. е. $x\in(21;\ 27)$.

958. Можно решить систему, состоящую из трёх неравенств (добавляется неравенство $y>0$). Однако удобно решить данную систему и из найденных решений указать те, которые удовлетворяют условию $y>0$.

в) $\begin{cases} (2y-1)(3y+2)-6y(y-4)<48, \\ \dfrac{y-1}{8}-\dfrac{6y+1}{4}-1<0; \end{cases}$

$$\begin{cases} 6y^2+y-2-6y^2+24y<48, \\ y-1-2(6y+1)-8<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 25y<50, \\ -11y<11; \end{cases} \qquad \begin{cases} y<2, \\ y>-1. \end{cases}$$

Решением данной системы является промежуток $(-1;\ 2)$. Так как $y>0$, то искомое значение y принадлежит промежутку $(0;\ 2)$.

960. Убедимся предварительно в том, что это уравнение имеет два корня, вычислив его дискриминант:

$$D=(4a)^2-4(4a^2-25)=100>0.$$

Следовательно, уравнение имеет два корня: $x_1=2a-5$; $x_2=2a+5$.

Поскольку $2a+5>2a-5$, достаточно решить неравенство $2a-5>2$. Получим $a>3{,}5$.

961. Для данного уравнения находим

$$\frac{D}{4}=(b-1)^2-(b^2-2b)=b^2-2b+1-b^2+2b=1>0.$$

Следовательно, уравнение имеет два корня: $x_1=b-2$; $x_2=b$.

Решим систему неравенств $\begin{cases} -5<b-2<5, \\ -5<b<5. \end{cases}$

Получим $-3<b<5$, т. е. $b\in(-3;\ 5)$.

962. Предположим, что туристы проходят в день x км. Имеем систему

$$\begin{cases} 6(x+5) > 90, \\ 8(x-5) < 90; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 10, \\ x < 16{,}25. \end{cases}$$

Значит, туристы проходят в день более 10 км, но менее 16 км 250 м.

963. При решении этой задачи учащиеся могут допустить достаточно распространённую ошибку, предположив, что средняя скорость на всём участке равна полусумме скоростей на первой и второй половинах пути.

Пусть x км/ч — скорость поезда на второй половине пути. Среднюю скорость на всём пути находим по формуле среднего гармонического, учитывая, что на первой половине пути поезд шёл со скоростью 60 км/ч: $v_{\text{ср}} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{x}}$.

По условию задачи $v_{\text{ср}} \leqslant 72$. Имеем неравенство

$$\frac{2}{\dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{x}} \leqslant 72; \qquad \frac{2 \cdot 60x}{x+60} \leqslant 72; \qquad \frac{120x - 72x - 4320}{x+60} \leqslant 0.$$

Так как $x + 60 > 0$, то должно выполняться неравенство $48x \leqslant 4320$. Решив неравенство, получим $x \leqslant 90$. По условию задачи $x > 60$, следовательно, скорость поезда на второй половине пути должна удовлетворять неравенству $60 < x \leqslant 90$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 29

4. Множество X состоит из простых двузначных чисел, не превосходящих 30, т. е. $X = \{23;\ 29\}$. Наименьший элемент множества X равен 23, наибольший — 29.

Множество Y состоит из натуральных чисел, не превосходящих 30, и простых двузначных чисел от 31 до 97. Наименьший элемент множества Y равен 1, наибольший — 97.

10. $A = \{14;\ 21;\ 28;\ \ldots;\ 98\}$; $B = \{10;\ 12;\ 14;\ \ldots;\ 98\}$;

$X = A \cap B$.

X — множество двузначных чисел, кратных 14. Наименьший элемент множества X равен 14, наибольший элемен — 98.

Пункт 30

11. Пересечением интервалов $(-\sqrt{15};\ \sqrt{3})$ и $(-6;\ 2)$ является интервал $(-\sqrt{15};\ \sqrt{3})$, так как $-\sqrt{15} \approx -3{,}9 > -6$,

$\sqrt{3} \approx 1{,}7 < 2$. Этому интервалу принадлежит пять целых чисел: –3, –2, –1, 0 и 1. Верный ответ под номером 4.

12. Поскольку $-4 < -\sqrt{11} < -3$, а $\sqrt{3} + \sqrt{7} < 1{,}8 + 2{,}7$, т. е. $\sqrt{3} + \sqrt{7} < 4{,}5$, то промежутку $\left[-\sqrt{11}; \sqrt{3} + \sqrt{7}\right)$ принадлежит восемь целых чисел: –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 и 4.

П у н к т 31

9. а) Решим неравенство

$$\frac{y-1}{5} - y < \frac{y}{15}; \quad 3y - 3 - 15y < y; \quad 13y > -3; \quad y > -\frac{3}{13}.$$

Наименьшее целое число, удовлетворяющее этому неравенству, равно 0.

11. При $2p - 3 = 0$, т. е. при $p = 1{,}5$, уравнение становится линейным и имеет единственный корень $x = \frac{1}{7}$.

При $p \neq 1{,}5$ данное уравнение не имеет корней, если его дискриминант отрицателен.

$$D = 49 - 4(2p - 3) = 61 - 8p; \quad 61 - 8p < 0; \quad p > 7\frac{5}{8}.$$

Значит, уравнение не имеет корней, если $p \in \left(7\frac{5}{8}; +\infty\right)$. Заметим, что значение $p = 1{,}5$ в этот интервал не входит.

12. а) Областью определения функции является множество значений x, при которых $12 - 6x \geqslant 0$ и $3x + 1 \neq 0$.

Имеем $x \leqslant 2$ и $x \neq -\frac{1}{3}$. Значит, областью определения функции является объединение промежутков: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 2\right]$.

13. а) Решим данное неравенство относительно x:

$$5x < a + 1; \quad x < \frac{a+1}{5}.$$

По условию $\frac{a+1}{5} < 6$, отсюда $a < 29$.

15. Пусть количество приобретённых папок равно x. Имеем неравенство

$$32x < 20x + 210; \quad 12x < 210; \quad x < 17{,}5.$$

Значит, наибольшее число папок, при котором их выгоднее купить в магазине, равно 17.

Пункт 32

9. Пусть x см — длина основания треугольника. Имеем неравенство $x + 2 \cdot 12{,}4 > 46$.

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, т. е. $x < 24{,}8$. Решив систему неравенств $\begin{cases} x + 24{,}8 > 46, \\ x < 24{,}8, \end{cases}$ получим $21{,}2 < x < 24{,}8$.

Длина основания по условию выражается целым числом, следовательно, она может быть равна 22 см, 23 см или 24 см.

11. а) Решим двойное неравенство:

$$-43 \leqslant 8 - 11x \leqslant 34; \quad -51 \leqslant -11x \leqslant 26; \quad -2\frac{4}{11} \leqslant x \leqslant 4\frac{7}{11}.$$

Наименьшее целое число, заключённое в этом промежутке, равно -2, а наибольшее целое число равно 4.

12. а) Преобразовав данную систему неравенств, получим

$$\begin{cases} x > \dfrac{p-6}{2}, \\ x < \dfrac{p+5}{3}. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений, если $\dfrac{p+5}{3} < \dfrac{p-6}{2}$, т. е. если $p > 28$.

13. Выразим через a значения x и y:

$$5x = 2a - 1; \quad x = \frac{2a-1}{5}; \quad y = x - a - 1 = \frac{2a-1}{5} - a - 1 = \frac{-3a-6}{5}.$$

Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2a-1}{5} > 0, \\ \dfrac{-3a-6}{5} < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a > \dfrac{1}{2}, \\ a > -2. \end{cases}$$

Отсюда $a > \dfrac{1}{2}$.

14. $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{3} - \dfrac{x+1}{2} < 0, \\ (4x-1)^2 + 11 < (8x-1)(2x+1); \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x < 11, \\ 14x > 13. \end{cases}$

Отсюда $\dfrac{13}{14} < x < 1\dfrac{4}{7}$.

Единственное целое число, удовлетворяющее исходной системе неравенств, равно 1.

Пункт 36. Доказательство неравенств

Методический комментарий

С несложными заданиями на доказательство неравенств учащиеся уже встречались при изучении главы IV «Неравенства». В данном пункте расширяется круг известных учащимся приёмов доказательства неравенств.

В примере 1 учебного текста заданное неравенство удобно представить в виде $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}>\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1}$.

Освобождаясь от иррациональности в числителе каждой из дробей $\dfrac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{1}$ и $\dfrac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1}}{1}$, получаем неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}>\dfrac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}}$, справедливость которого вытекает из того, что функция $y=\sqrt{x}$ является возрастающей и сумма $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$ меньше суммы $\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}$ при $a \geqslant 0$.

В примере 2 учебного текста для доказательства неравенства используется соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел. А в примере 3 заданное двойное неравенство доказывается путём замены каждой из разностей $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ и $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ соответствующими дробями $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$.

Интересным для учащихся является пример 4, в котором неравенство доказывается с опорой на соотношения $\dfrac{1}{n+1}>\dfrac{1}{2n}, \ldots, \dfrac{1}{2n-1}>\dfrac{1}{2n}$.

В силу сложности представленного в данном пункте материала организовать его изучение рекомендуется в виде занятия математического кружка. Предварительно можно поручить четырём учащимся подготовить сообщения о приёмах доказательства неравенств, рассмотренных в авторских примерах 1—4. После этого можно предложить учащимся выполнить под руководством учителя некоторые из заданий, помещённых в данном пункте, например задания **905**,

907—909, 911. Рекомендуется выполнение каждого из этих упражнений начинать с коллективного поиска приёма доказательства неравенства под руководством учителя.

Изучение данного пункта позволяет учащимся, интересующимся математикой, сделать новые шаги в достижении личностных, метапредметных и предметных результатов обучения, определённых Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования.

Указания к упражнениям учебника

905. а) Рассмотрим разность выражений, стоящих в левой и правой частях неравенства:

$$a^2+b^2+4-2(a+b+1)=a^2+b^2+4-2a-2b-2=$$
$$=a^2-2a+1+b^2-2b+1=(a-1)^2+(b-1)^2.$$

Данная разность при любых значениях a и b принимает неотрицательные значения, следовательно, неравенство доказано.

906. а) Рассмотрим и преобразуем разность:

$$\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}-\frac{(x+y)xy}{x^2y^2}=$$
$$=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2-xy)}{x^2y^2}=\frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2}.$$

Так как $x>0$ и $y>0$, то $\dfrac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2}\geqslant 0$;

б) $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}-(x+y)=\dfrac{x^3+y^3}{xy}-\dfrac{(x+y)xy}{xy}=$

$$=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2-xy)}{xy}=\frac{(x+y)(x-y)^2}{xy}.$$

Так как $x>0$ и $y>0$, то $\dfrac{(x+y)(x-y)^2}{xy}\geqslant 0$.

907. а) Перемножим два неравенства, в которых используется соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел a и b и положительных чисел ab и 16:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\quad\text{и}\quad\frac{ab+16}{2}\geqslant\sqrt{16ab}.$$
$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{ab+16}{2}\geqslant 4ab;$$
$$(a+b)(ab+16)\geqslant 16ab;$$

б) $\dfrac{a^2+4b}{2} \geqslant \sqrt{4a^2b}$ и $\dfrac{4b+25}{2} \geqslant \sqrt{100b}$;

$\dfrac{a^2+4b}{2} \cdot \dfrac{4b+25}{2} \geqslant \sqrt{400a^2b^2}$; $(a^2+4b)(4b+25) \geqslant 80ab$.

908. а) Преобразуем сумму, стоящую в левой части неравенства:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}=\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right).$$

По свойству суммы двух взаимно обратных положительных чисел имеем

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) \geqslant 2+2+2=6;$$

б) перемножим неравенства $\dfrac{1+a}{2} > \sqrt{a}$, $\dfrac{1+b}{2} > \sqrt{b}$, $\dfrac{1+c}{2} > \sqrt{c}$, и воспользуемся условием $abc=9$:

$$\frac{1+a}{2}\cdot\frac{1+b}{2}\cdot\frac{1+c}{2} > \sqrt{abc};\ (1+a)(1+b)(1+\text{c}) > 24.$$

909. Рассмотрим разность куба полусуммы двух положительных чисел и полусуммы их кубов:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3-\frac{a^3+b^3}{2}=\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-4a^3-4b^3}{8}=$$

$$=\frac{3a^2(b-a)-3b^2(b-a)}{8}=\frac{3(a-b)(a+b)(b-a)}{8}=\frac{-3(a-b)^2(a+b)}{8}.$$

Так как $a>0$ и $b>0$, то $\dfrac{-3(a-b)^2(a+b)}{8} \leqslant 0$.

910. Сравним квадраты левой и правой частей неравенства:

$$\left(\sqrt{(a+c)(b+d)}\right)^2=ab+ad+bc+cd;$$

$$(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2=ab+cd+2\sqrt{abcd}\ .$$

Так как $\dfrac{bc+ad}{2} > \sqrt{abcd}$, то справедливо и исходное неравенство.

911. Сложим три очевидных для положительных чисел неравенства

$$\frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{a+b},\ \ \frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{b+c}\ \text{ и }\ \frac{1}{a+b+c}<\frac{1}{c+a}\ .$$

Получим $\dfrac{3}{a+b+c}<\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$.

912. Сложим три очевидных неравенства

$$\sqrt{4x+1} \leqslant \sqrt{4x^2+4x+1} = |2x+1|,$$

$$\sqrt{4y+1} \leqslant |2y+1|, \ \sqrt{4z+1} \leqslant |2z+1|.$$

Получим

$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leqslant |2x+1| + |2y+1| + |2z+1| \leqslant$
$\leqslant |2(x+y+z)+3| = 5$, так как $x+y+z=1$.

913. Так как $a>1$, то

$$\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} > \sqrt{a+1} - \sqrt{a} = \frac{a+1-a}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Отсюда $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$ при любом a, большем 1.

914. Обозначим через x км/ч скорость, намеченную велосипедистом, а через s км — расстояние от посёлка до города. На весь путь, включая остановку на $\frac{1}{2}$ ч, велосипедист должен был затратить $\left(\frac{s}{x}+\frac{s}{x}+\frac{1}{2}\right)$ ч, т. е. $\left(\frac{2s}{x}+\frac{1}{2}\right)$ ч. Но фактическое время, затраченное велосипедистом на путь из посёлка в город и обратно, равно $\left(\frac{s}{x-2}+\frac{s}{x+2}+\frac{1}{2}\right)$ ч. Преобразуем это выражение:

$$\frac{s}{x-2}+\frac{s}{x+2}+\frac{1}{2} = \frac{2sx}{x^2-4}+\frac{1}{2} = \frac{2s}{x-\frac{4}{x}}+\frac{1}{2}.$$

Так как для любого положительного x верно неравенство $x > x - \frac{4}{x}$, то $\frac{2s}{x-\frac{4}{x}}+\frac{1}{2} > \frac{2s}{x}+\frac{1}{2}$, т. е. велосипедист затратил на весь путь больше времени, чем планировал. Значит, он не успел вернуться к намеченному сроку.

ГЛАВА V

Степень с целым показателем. Элементы статистики

§ 12. Степень с целым показателем и её свойства

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
37	Определение степени с целым отрицательным показателем	2 (2)
38	Свойства степени с целым показателем	2 (4)
39	Стандартный вид числа	2 (2)
	Контрольная работа № 9	1

Содержание материала

В данном параграфе расширяется запас знаний учащихся о степенях. Вводится понятие степени с целым отрицательным показателем, рассматриваются свойства степени с целым показателем, их применение в вычислениях и тождественных преобразованиях, даётся представление о стандартном виде числа, о записи больших и малых чисел в стандартном виде.

Основная цель

Основная цель изучения данного параграфа состоит в том, чтобы ввести понятие степени с целым отрицательным показателем, познакомить учащихся со свойствами степени с целым показателем, сформировать умение использовать эти свойства в вычислениях и преобразованиях, дать представление о записи числа в стандартном виде.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного параграфа делаются новые шаги в формировании умений учащихся вычислять значения числовых выражений и выполнять тождественные преобразования выражений с переменными. При введении понятия степени с целым показателем учащиеся овладевают умением находить значения выражений вида a^m, где a — произвольное число, отличное от нуля, m — целое отрицательное число. Изучение свойств степени с целым показателем создаёт предпосылки для формирования умения выполнять преобразования выражений, в записи которых используются степени с отрицательными показателями: представлять в виде степени произведение и частное степеней с одинаковыми основаниями и целыми показателями, возводить степень в степень в случаях, когда один из показателей или оба показателя являются целыми отрицательными числами. Принципиально новым шагом для учащихся является введение понятия стандартного вида числа. Они должны усвоить соответствующее определение, научиться использовать запись чисел в стандартном виде для выражения и сопоставления размеров объектов и длительности процессов в окружающем мире.

Методический комментарий

К изучению данного параграфа учащиеся приступают, уже овладев определённым запасом знаний о степенях. Им известно, что степенью числа a с натуральным показателем n, бо́льшим единицы, называется выражение a^n, равное произведению n множителей, каждый из которых равен a, а также, что $a^1 = a$. Учащиеся получили представление о степени с нулевым показателем. Они знают, что $a^0 = 1$ при любом значении a, отличном от нуля, и что выражение 0^0 не имеет смысла. В пункте 37 сведения о степенях расширяются. Вводится понятие степени с целым отрицательным показателем: если $a \neq 0$ и n — целое отрицательное число, то $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$. Можно познакомить учащихся с соответствующей словесной формулировкой: степень с основанием, отличным от нуля, и целым отрицательным показателем равна дроби, числитель которой — единица, а знаменатель — степень с тем же основанием и с противоположным показателем. Необходимо обратить внимание учащихся на то, что выражение 0^n при любом целом отрицательном значении n не имеет смысла.

Усвоению введённого определения и дальнейшему развитию вычислительных умений учащихся способствуют упражнения **964—977**. Они являются достаточно простыми, но выполнение их требует от учащихся внимания и аккуратности. Полезно предложить учащимся ответить на вопрос обобщающего характера: при каком условии значение выражения a^n, где a — отличное от нуля число и n — целое число, является положительным числом и при каком — отрицательным числом? В учебнике этот вопрос не рассматривается. Однако учащиеся могут самостоятельно сделать вывод: если $a > 0$, то $a^n > 0$ при любом значении n; если $a < 0$, то $a^n > 0$ при чётном значении n и $a^n < 0$ при нечётном значении n.

Систему упражнений, включённых в пункт 37, завершает блок заданий **978—982**. Эти упражнения готовят учащихся к выполнению преобразований более сложных выражений, в записи которых используются степени с отрицательными показателями.

В пункте 38 рассматриваются свойства степени с целым показателем. Учащимся несложно запомнить эти свойства, так как они аналогичны соответствующим свойствам степени с натуральным показателем. Важно обратить внимание учащихся на те условия, которым должны удовлетворять основания степеней.

Приём, с помощью которого можно доказать свойства степени с целым показателем, демонстрируется в учебнике на примере преобразования произведения степеней с целыми отрицательными показателями. Доказательство всех свойств в общем виде связано с перебором большого числа вариантов и поэтому не приводится в учебнике.

Усвоению свойств степени с целым показателем способствуют включённые в данный пункт упражнения **985—1009**, предназначенные для классной и домашней работы. Первую группу из них составляют упражнения **985—995**, направленные в основном на формирование умения применять свойства степени с целым показателем при нахождении значений числовых выражений, содержащих степени с отрицательными показателями. Рекомендуется специально остановиться на задании **995**, предназначенном для работы в парах. Желательно, чтобы учащиеся указали, какие свойства степени с целым показателем они использовали при сокращении дробей.

Далее учащиеся приступают к выполнению в классе и дома упражнений **996—1009**. При недостатке времени часть из этих упражнений можно использовать на двух последующих уроках при изучении пункта 39. Хорошо успевающим учащимся можно предложить выполнить некоторые из дополнительных упражнений к главе V, например упражнения **1078**, **1082—1085**.

Завершается § 12 пунктом 39 «Стандартный вид числа». Представленный в нём материал имеет важное прикладное значение. Учащиеся знакомятся со способом записи больших и малых чисел, принятым в науке и технике. Приведённые в учебнике примеры убеждают в целесообразности использования такого способа. Рекомендуется специально остановиться на упражнении **1022**, предназначенном для работы в парах. После его выполнения следует организовать коллективную проверку результатов, полученных при работе пар.

Из представленных в учебнике дополнительных упражнений к § 12 полезно использовать задания **1096—1098**, иллюстрирующие практическую значимость приобретённых учащимися умений.

Указания к основным упражнениям учебника

Упражнения **968** и **969** способствуют усвоению определения степени с целым отрицательным показателем.

976. ж) $0{,}5^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{0{,}5^2}+\frac{1}{\frac{1}{3}}=4+3=7;$

з) $0{,}3^0+0{,}1^{-4}=1+\frac{1}{0{,}1^4}=1+\frac{1}{0{,}0001}=10001.$

980. Сначала следует воспользоваться определением степени с целым отрицательным показателем, а затем выполнить действия с рациональными дробями, применяя формулы сокращённого умножения:

в) $(a+b^{-1})(a^{-1}-b)=\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-b\right)=\frac{(ab+1)(1-ab)}{ba}=\frac{1-a^2b^2}{ab};$

г) $(x-2y^{-1})(x^{-1}+2y)=\left(x-\frac{2}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+2y\right)=\frac{(xy-2)(1+2xy)}{xy}=$

$=\frac{xy-2+2(xy)^2-4xy}{xy}=\frac{2x^2y^2-3xy-2}{xy}.$

981. б) $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=$

$=\frac{b^2-a^2}{(b-a)^2\cdot a^2b^2}=\frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)^2a^2b^2}=\frac{b+a}{(b-a)a^2b^2}.$

988. Из определения степени с целым отрицательным показателем следует, что

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

где n — любое целое число, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

989. д) $0{,}002^{-1} = \dfrac{1}{0{,}002} = 500;$

е) $\left(-1\dfrac{1}{3}\right)^{-5} = \left(-\dfrac{4}{3}\right)^{-5} = \left(-\dfrac{3}{4}\right)^{5} = -\dfrac{243}{1024}.$

992. а) $5^m \cdot 5^{m+1} \cdot 5^{1-m} = 5^{m+(m+1)+(1-m)} = 5^{m+2};$
б) $(5^m)^2 \cdot (5^{-3})^m = 5^{2m} \cdot 5^{-3m} = 5^{2m-3m} = 5^{-m};$
в) $625 : 5^{4m-2} = 5^4 : 5^{4m-2} = 5^{4-(4m-2)} = 5^{6-4m}.$

993. д) $\dfrac{2^{-21}}{4^{-5} \cdot 4^{-6}} = \dfrac{2^{-21}}{4^{-11}} = \dfrac{2^{-21}}{(2^2)^{-11}} = 2^{-21-(-22)} = 2^1 = 2;$

з) $\dfrac{5^{-5} \cdot 25^{10}}{125^3} = \dfrac{5^{-5} \cdot (5^2)^{10}}{(5^3)^3} = 5^{-5+20-9} = 5^6 = 15\,625.$

994. г) $12^0 : (12^{-1})^2 = 1 : 12^{-2} = 1 : \dfrac{1}{12^2} = 144;$

е) $\dfrac{(3^{-2})^3 \cdot 9^4}{(3^3)^2} = \dfrac{3^{-6} \cdot (3^2)^4}{3^6} = \dfrac{3^{-6+8}}{3^6} = 3^{2-6} = 3^{-4} = \dfrac{1}{81}.$

995. (*Для работы в парах.*) При выполнении этого задания используются свойства степени с целым показателем.

а) $\dfrac{25^m}{5^{2m-1}} = \dfrac{(5^2)^m}{5^{2m-1}} = 5^{2m-(2m-1)} = 5^1 = 5;$

б) $\dfrac{6^m}{2^{m-1} \cdot 3^{m+1}} = \dfrac{(2 \cdot 3)^m}{2^{m-1} \cdot 3^{m+1}} = \dfrac{2^m \cdot 3^m}{2^{m-1} \cdot 3^{m+1}} = 2^{m-(m-1)} \cdot 3^{m-(m+1)} =$

$= 2^1 \cdot 3^{-1} = \dfrac{2}{3}.$

999. е) $3\dfrac{1}{3}a^5 b^{-18} \cdot 0{,}6a^{-1} \cdot b^{20} = \dfrac{10}{3} \cdot \dfrac{3}{5} \cdot a^{5-1} b^{-18+20} = 2a^4 b^2.$

1000. а) Следует сначала преобразовать выражение

$$0{,}2a^{-2} b^4 \cdot 5a^3 b^{-3} = (0{,}2 \cdot 5)a^{-2+3} b^{4-3} = ab.$$

Если $a = -0{,}125$, $b = 8$, то $ab = -0{,}125 \cdot 8 = -1$.
1001. а) Упростим данное выражение:

$$1{,}6x^{-1}y^{12} \cdot 5x^3 y^{-11} = (1{,}6 \cdot 5)x^{-1+3}\, y^{12-11} = 8x^2 y.$$

Если $x = -0{,}2$, $y = 0{,}7$, то $8x^2 y = 8 \cdot (-0{,}2)^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}224$.
1004. г) $10^n x^{-2n}\, y^{3n} = (10x^{-2}\, y^3)^n$, n — целое число.

1007. в) $\left(\dfrac{c^{-4}}{10a^5b^2}\right)^{-2} \cdot (5a^3bc^2)^{-2} = \dfrac{c^8 \cdot 5^{-2} a^{-6} b^{-2} c^{-4}}{10^{-2} a^{-10} b^{-4}} = \dfrac{5^{-2}}{10^{-2}} \times$

$\times\, a^{-6+10} b^{-2+4} c^{8-4} = \dfrac{5^{-2}}{5^{-2} \cdot 2^{-2}} \cdot a^4 b^2 c^4 = 4a^4 b^2 c^4.$

Можно выполнить преобразование заданного выражения иначе, заменив произведение степеней с одинаковыми показателями степенью произведения. Получим

$$\left(\frac{c^{-4}}{10a^5b^2}\right)^{-2}\cdot(5a^3bc^2)^{-2}=\left(\frac{c^{-4}\cdot 5a^3bc^2}{10a^5b^2}\right)^{-2}=\left(\frac{c^{-2}}{2a^2b}\right)^{-2}=\frac{c^4}{2^{-2}a^{-4}b^{-2}}=4a^4b^2c^4.$$

1009. По теореме Виета сумма корней уравнения $8x^2-6x+n=0$ равна $\frac{6}{8}$, а их произведение равно $\frac{n}{8}$, т. е. $x_1+x_2=\frac{3}{4}$; $x_1x_2=\frac{n}{8}$.

Известно, что $x_1^{-1}+x_2^{-1}=6$, т. е. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=6$.

Отсюда $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=6$; $x_1+x_2=6x_1x_2$.

Значит, $\frac{3}{4}=6\cdot\frac{n}{8}$; $\frac{3}{4}=\frac{3n}{4}$; $n=1$.

1017. Масса Земли приближённо равна $6\cdot 10^{21}$ т, а масса атома водорода приближённо равна $1{,}7\cdot 10^{-21}$ г.

1018. а) Так как 1 т $=10^3$ кг $=10^3\cdot 10^3$ г $=10^6$ г, то

$$3{,}8\cdot 10^3\text{ т}=3{,}8\cdot 10^3\cdot 10^6\text{ г}=3{,}8\cdot 10^9\text{ г};$$

б) так как 1 км $=10^3$ м $=10^3\cdot 10^2$ см $=10^5$ см, то

$$1{,}7\cdot 10^{-4}\text{ км}=1{,}7\cdot 10^{-4}\cdot 10^5\text{ см}=1{,}7\cdot 10\text{ см}=17\text{ см};$$

в) так как 1 кг $=10^{-3}$ т, то

$$8{,}62\cdot 10^{-1}\text{ кг}=8{,}62\cdot 10^{-1}\cdot 10^{-3}\text{ т}=8{,}62\cdot 10^{-4}\text{ т};$$

г) так как 1 см $=10^{-2}$ м, то

$$5{,}24\cdot 10^5\text{ см}=5{,}24\cdot 10^5\cdot 10^{-2}\text{ м}=5{,}24\cdot 10^3\text{ м}.$$

1022. (*Для работы в парах.*) а) Рассмотрим отношение массы Земли к массе Марса:

$$\frac{6{,}0\cdot 10^{24}}{6{,}4\cdot 10^{23}}=\frac{6{,}0\cdot 10}{6{,}4}\approx 9{,}4.$$

Масса Земли больше массы Марса приблизительно в 9,4 раза;

б) рассмотрим отношение массы Юпитера к массе Венеры:

$$\frac{1{,}90\cdot 10^{27}}{4{,}87\cdot 10^{24}}\approx 0{,}39\cdot 10^3=390.$$

Масса Юпитера больше массы Венеры приблизительно в 390 раз.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

1081. г) $(x^{-1}+y^{-1})(x^{-1}-y^{-1})=x^{-2}-y^{-2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}$.

1082. б) $\frac{ab^{-1}-a^{-1}b}{a^{-1}-b^{-1}}=\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{(a^2-b^2)\cdot ab}{ab(b-a)}=\frac{(a-b)(a+b)}{b-a}=$

$=-(a+b)$.

Можно преобразование этого выражения выполнить иначе:

$$\frac{ab^{-1}-a^{-1}b}{a^{-1}-b^{-1}}=\frac{a^{-1}b^{-1}(a^2-b^2)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{a^{-1}b^{-1}(a^2-b^2)ab}{b-a}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)}{b-a}=-(a+b).$$

1084. б) $\frac{15^n}{3^{n-1}\cdot 5^{n+1}}=\frac{3^n\cdot 5^n}{3^{n-1}\cdot 5^{n+1}}=3\cdot 5^{-1}=0{,}6$.

1085. а) Упростим выражение

$$\frac{21^m}{3^{m-1}\cdot 7^{m+1}}=\frac{3^m\cdot 7^m}{3^{m-1}\cdot 7^{m+1}}=3^{m-(m-1)}\cdot 7^{m-(m+1)}=3\cdot 7^{-1}=\frac{3}{7}.$$

Значение выражения при любом значении m равно одному и тому же числу, т. е. не зависит от значения m;

б) $\frac{6^m\cdot 10^{m+1}}{2^{2m}\cdot 15^{m-1}}=\frac{2^m\cdot 3^m\cdot 2^{m+1}\cdot 5^{m+1}}{2^{2m}\cdot 3^{m-1}\cdot 5^{m-1}}=2^{m+m+1-2m}\cdot 3^{m-(m-1)}\times$

$\times 5^{m+1-(m-1)}=2\cdot 3\cdot 5^2=150$.

Значит, значение выражения не зависит от значения m.

1086. Вынося последовательно за скобки множитель x, x^{-1}, x^{-2}, получаем

$$x^{-2}+x^{-1}+x=x(x^{-3}+x^{-2}+1)=x^{-1}(x^{-1}+1+x^2)=x^{-2}(1+x+x^3).$$

1090. а) $\frac{3^{n+1}-3^n}{2}=\frac{3^n(3-1)}{2}=3^n$;

б) $\frac{2^n+2^{-n}}{4^n+1}=\frac{2^{-n}(2^{2n}+1)}{2^{2n}+1}=2^{-n}$.

1091. б) $\frac{5^{n+1}\cdot 2^{n-2}+5^{n-2}\cdot 2^{n-1}}{10^{n-2}}=\frac{2^{n-2}\cdot 5^{n-2}(5^3+2)}{2^{n-2}5^{n-2}}=127$;

г) $\dfrac{21^n}{3^{n-1}7^{n+1}+3^n7^n}=\dfrac{3^n7^n}{3^{n-1}\cdot 7^n(7+3)}=\dfrac{3^{n-(n-1)}}{10}=0{,}3.$

1092. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $nx^2-5x+1=0$, тогда по теореме Виета $x_1+x_2=\dfrac{5}{n}$, $x_1x_2=\dfrac{1}{n}$. По условию

$$x_1^{-2}+x_2^{-2}=13,\text{ т. е. } \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=13;\ x_1^2+x_2^2=13x_1^2x_2^2.$$

Но $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, следовательно,

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=13(x_1x_2)^2.$$

Решим уравнение относительно n:

$$\frac{25}{n^2}-\frac{2}{n}=\frac{13}{n^2};\quad 25-2n=13;\quad n=6.$$

1094. а) $(3{,}4\cdot 10^{15})\cdot(7\cdot 10^{-12})=23{,}8\cdot 10^3=2{,}38\cdot 10^4$;
г) $(4{,}08\cdot 10^{11}):(5{,}1\cdot 10^{-7})=0{,}8\cdot 10^{18}=8\cdot 10^{17}$.

1095. Расстояние от Земли до звезды α Центавра равно

$$2{,}07\cdot 10^5\cdot 1{,}495\cdot 10^8\text{ км}\approx 3{,}09\cdot 10^{13}\text{ км}.$$

1096. 1 ккал $=4{,}2\cdot 10^3$ Дж.

$$1\text{ Дж}=\frac{1}{4{,}2\cdot 10^3}\text{ ккал}\approx 0{,}2\cdot 10^{-3}\text{ ккал}=2\cdot 10^{-4}\text{ ккал}.$$

1098. $6{,}0\cdot 10^{21}-7{,}35\cdot 10^{19}=600\cdot 10^{19}-7{,}35\cdot 10^{19}=$
$=592{,}65\cdot 10^{19}\approx 5{,}9\cdot 10^{21}$ (т).

Масса Земли больше массы Луны приблизительно на $5{,}9\cdot 10^{21}$ т.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

П у н к т 33

11. б) $37\cdot 6^{-2}-3\cdot\left(\dfrac{4}{7}\right)^{-1}+5\cdot\left(1\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=\dfrac{37}{6^2}-3\cdot\dfrac{7}{4}+5\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=$
$=\dfrac{37}{36}-\dfrac{21}{4}+\dfrac{20}{9}=-2.$

12. в) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{b}{a}=\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{b^2-ab}{a^2}=\dfrac{b(b-a)}{a^2}$;

г) $\dfrac{cd^{-1}-c^{-1}d}{c^{-2}-d^{-2}}=\dfrac{\dfrac{c}{d}-\dfrac{d}{c}}{\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{d^2}}=\dfrac{(c^2-d^2)c^2d^2}{cd\cdot(d^2-c^2)}=-cd.$

14. а) $(3^{-1}+5^{-1})^2:(3^{-1}-5^{-1})^2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)^2:\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)^2=$

$=\left(\frac{8}{15}\right)^2:\left(\frac{2}{15}\right)^2=\frac{64}{4}=16.$

15. Если $a=\frac{1}{5}$, $b=-\frac{1}{3}$, то $a^{-1}=5$, $b^{-1}=-3$. Подставив значения a^{-1} и b^{-1} в заданное выражение, получим

$$(5-3)(5^3+5^2\cdot(-3)-5\cdot(-3)^2+(-3)^3)=$$
$$=2\cdot(125-75-45-27)=2\cdot(-22)=-44.$$

Пункт 34

6. б) $\frac{7^n+1}{7^{-n}+1}=\frac{7^n+1}{\frac{1}{7^n}+1}=\frac{(7^n+1)\cdot 7^n}{7^n+1}=7^n;$

г) $\frac{4^{-n}+4^{2-n}}{51}=\frac{4^{-n}(1+4^2)}{51}=\frac{4^{-n}}{3}=\frac{1}{3\cdot 4^n}.$

8. а) Удобно воспользоваться тем, что $0{,}2^{-n-3}=5^{n+3}$, а $0{,}2^{-n-5}=5^{n+5}$. Имеем

$$\frac{3^{m+1}\cdot 0{,}2^{-n-3}-3^{m-2}\cdot 0{,}2^{-n-5}}{3^{m-2}\cdot 5^{n+1}}=\frac{3^{m+1}\cdot 5^{n+3}-3^{m-2}\cdot 5^{n+5}}{3^{m-2}\cdot 5^{n+1}}=$$
$$=\frac{3^{m-2}5^{n+3}(3^3-5^2)}{3^{m-2}\cdot 5^{n+1}}=5^2\cdot(27-25)=25\cdot 2=50.$$

Значит, значение выражения не зависит от значений переменных.

11. Преобразуем выражение, стоящее в левой части равенства:

$$\frac{3^n\cdot 11^{n-1}-3^{n-2}\cdot 11^n}{33^n}+\frac{2}{99}=\frac{3^{n-2}\cdot 11^{n-1}(3^2-11)}{3^n\cdot 11^n}+\frac{2}{99}=$$
$$=\frac{-2}{3^2\cdot 11}+\frac{2}{99}=-\frac{2}{99}+\frac{2}{99}=0.$$

12. По теореме Виета сумма корней уравнения $nx^2-5x+3=0$ равна $\frac{5}{n}$, а произведение корней равно $\frac{3}{n}$, т. е. $x_1+x_2=\frac{5}{n}$, $x_1\cdot x_2=\frac{3}{n}$.

Преобразуем сумму $x_1^{-3}+x_2^{-3}$:

$$x_1^{-3}+x_2^{-3}=\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}=\frac{(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)}{(x_1x_2)^3}.$$

Подставив в это выражение $\frac{5}{n}$ вместо $(x_1 + x_2)$ и $\frac{3}{n}$ вместо x_1x_2, получим

$$x_1^{-3} + x_2^{-3} = \frac{\frac{5}{n}\left(\frac{25}{n^2} - 3 \cdot \frac{3}{n}\right)}{\left(\frac{3}{n}\right)^3} = \frac{5(25 - 9n)}{27}.$$

По условию $x_1^{-3} + x_2^{-3} = 1\frac{8}{27}$. Имеем уравнение

$$\frac{5(25-9n)}{27} = 1\frac{8}{27}; \quad 5(25 - 9n) = 35; \quad 25 - 9n = 7; \quad n = 2.$$

Пункт 35

9. а) $2{,}4 \cdot 10^{-5} + 7{,}6 \cdot 10^{-5} = 10 \cdot 10^{-5} = 1 \cdot 10^{-4}$;

б) $3{,}1 \cdot 10^{4} + 2{,}8 \cdot 10^{5} = 0{,}31 \cdot 10^{5} + 2{,}8 \cdot 10^{5} = 3{,}11 \cdot 10^{5}$;

в) $1{,}5 \cdot 10^{-2} + 3{,}2 \cdot 10^{-3} = 1{,}5 \cdot 10^{-2} + 0{,}32 \cdot 10^{-2} = 1{,}82 \cdot 10^{-2}$.

11. Вычислим объём свинцовой плиты:

$$V = 1{,}8 \cdot 5 \cdot 10^{-1} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-1} = 13{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ (м}^3\text{)}.$$

Масса этой свинцовой плиты m равна произведению плотности железа на объём плиты, т. е.

$$m = 11{,}4 \cdot 13{,}5 \cdot 10^{-2} = 153{,}9 \cdot 10^{-2} = 1{,}539 \text{ (т)}.$$

§ 13. Элементы статистики

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
40	Сбор и группировка статистических данных	2 (2)
41	Наглядное представление статистической информации	3 (3)

Содержание материала

В данном параграфе расширяются начальные сведения из статистики, полученные учащимися в курсе алгебры 7 класса. Даётся представление об организации статистических исследований, вводятся понятия генеральной и выборочной совокупностей, репрезентативной выборки. Впервые учащиеся встречаются с понятиями «таблица частот», «таблица относительных частот», «интервальный ряд». Расширяется запас знаний о наглядной интерпретации результатов исследований.

Учащиеся узнают, что с этой целью наряду с известными им столбчатыми и круговыми диаграммами используются полигоны и гистограммы.

Основная цель

Основная цель изучения данного параграфа состоит в том, чтобы познакомить учащихся с подходом к организации статистических исследований, сбору и обработке их результатов, а также с новыми способами наглядного представления статистической информации.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного параграфа учащиеся овладевают новыми понятиями, дополняющими уже известные им сведения из статистики. Они должны уметь приводить примеры генеральной и выборочной совокупностей данных, представлять некоторую совокупность данных, полученных в результате исследования, в виде таблицы частот, таблицы относительных частот, интервального ряда. Формируется умение учащихся по имеющейся таблице частот, составленной по результатам некоторого исследования, находить среднее арифметическое, размах и моду ряда данных. Существенно расширяется круг умений учащихся, связанных с наглядным представлением статистической информации. Наряду со знакомыми им приёмами построения и истолкования столбчатых и круговых диаграмм, они овладевают умением строить и интерпретировать полигоны и гистограммы.

Методический комментарий

Включение в курс алгебры начальных сведений из статистики имеет важное общеобразовательное значение, так как готовит учащихся к пониманию разнообразной информации из областей экономики и социологии, широко представленной в печати, на радио и телевидении.

Изучение элементов статистики распределяется между курсами алгебры 7 и 8 классов. В 7 классе учащиеся познакомились с простейшими статистическими характеристиками — средним арифметическим, модой, медианой, размахом ряда данных, научились находить их в несложных ситуациях, понимать практический смысл этих характеристик. В 8 классе сведения из статистики дополняются и углубляются.

Ознакомление учащихся с пунктом 40 рекомендуется начать с беседы об организации статистических исследований. Учащиеся узнают о таких понятиях, как генеральная совокупность и представительная (репрезентативная) выборка. Усвоению этих понятий способствуют упражнения **1028** и **1029**, а также упражнение **1099**, входящее в число дополнительных упражнений к § 13. При выполнении этих упражнений важно организовать коллективное обсуждение учащимися ответов на поставленные вопросы.

Далее учащиеся знакомятся с составлением таблиц частот и относительных частот. Они учатся находить по таблице частот такие статистические характеристики, как среднее арифметическое, мода и размах ряда данных. Рекомендуется повторить с учащимися определения этих понятий, прежде чем они приступят к выполнению соответствующих упражнений. Следует иметь в виду, что задача нахождения по таблице медианы ряда данных в силу её сложности перед учащимися не ставится. Восьмиклассникам, интересующимся математикой, можно порекомендовать ознакомиться с соответствующим материалом, рассмотренным в тексте учебника. Принципиально новым для учащихся является понятие интервального ряда. Они должны уметь представлять некоторые данные в виде интервального ряда, находить для заданного интервального ряда среднее значение величины, предварительно заменяя каждый интервал его серединой.

Пункт 41 посвящён наглядному представлению статистической информации. Включённый в него материал расширяет возможности учащихся воспринимать образную интерпретацию результатов статистических исследований, представленную в печати и на телевидении. На изучение этого пункта отводится три урока. Первый урок можно начать с напоминания учащимся сведений о столбчатых и круговых диаграммах, известных им из курса математики младших классов. Рекомендуется рассмотреть с ними приведённые в тексте учебника примеры построения столбчатой и круговой диаграмм, предложить выполнить в классе упражнение **1045**, а дома упражнения **1042—1044**. На этом уроке можно познакомить учащихся с понятием полигона и приведённым в тексте учебника примером построения полигона, предложив им выполнить в классе упражнение **1047** и дома упражнение **1046**.

Последующие два урока рекомендуется посвятить работе с полигонами и гистограммами, формированию умения иллюстрировать результаты исследований с помощью полигонов и гистограмм, а также получать информацию, рассматривая некоторый полигон или гистограмму. Важно обратить внимание учащихся на отличие полигона от графика функции и гистограммы от обычной столбчатой диаграммы. Полигон позволяет судить о значениях некоторой величины в определённых точках и о характере изменения этих значений при переходе от одной фиксированной точки к другой. Гистограмма отличается от обычной столбчатой диаграммы тем, что основания прямоугольников в ней выбираются не произвольно, как это делается в столбчатой диаграмме, а определены длиной интервала того интервального ряда, который иллюстрируется данной гистограммой.

В системе упражнений, включённых в пункт 41, представлены различные задания на построение и чтение полигонов и гистограмм. Специальное внимание следует уделить заданиям **1049** и **1055**, предназначенным для работы в парах. После их выполнения полезно организовать коллективное обсуждение полученных результатов. При наличии времени можно предложить учащимся выполнить дополнительное упражнение **1105**, проверяющее усвоение понятия «гистограмма».

Указания к основным упражнениям учебника

1031. При выполнении этого и последующих заданий можно использовать калькулятор. Полезно повторить с учащимися известные им из курса 7 класса определения основных статистических понятий: среднего арифметического, размаха ряда, моды и медианы.

1032. Найдём среднее арифметическое ряда данных:

$$\frac{2\cdot 20+5\cdot 12+10\cdot 7+25\cdot 4+100\cdot 2}{20+12+7+4+2}=\frac{470}{45}\approx 10.$$

Среднее число акций, приобретённых сотрудниками лаборатории, приближённо равно 10. Размах этого ряда равен 100 – 2, т. е. 98. Он характеризует наибольшее различие в числе приобретённых сотрудниками акций. Мода ряда равна 2, т. е. большинство сотрудников приобрели по две акции.

1035. Общее число писавших контрольную работу равно 625. Отсюда находим, что

$$\frac{27}{625}\cdot 100\%\approx 4\%,\quad \frac{53}{625}\cdot 100\%\approx 8\%,\quad \frac{87}{625}\cdot 100\%\approx 14\%,$$

$$\frac{223}{625}\cdot 100\%\approx 36\%,\quad \frac{146}{625}\cdot 100\%\approx 23\%,\quad \frac{89}{625}\cdot 100\%\approx 14\%.$$

Таблица относительных частот имеет вид:

Число выполненных заданий	0	1	2	3	4	5	6
Относительная частота, %	—	4	8	14	36	23	14

Заметим, что сумма относительных частот на 1 % отличается от 100 %, что является результатом округления.

1036. В качестве первого интервала можно взять интервал (15; 20). Условимся считать, что пограничное число принадлежит последующему интервалу. Получаем таблицу:

Время, мин	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40
Число учащихся	5	1	7	8	3

1044. Перед построением круговой диаграммы следует определить величину центрального угла, соответствующего площади, отведённой под каждую культуру. Так как 100 % соответствует угол 360°, то 1 % соответствует угол 3,6°. Имеем

$$3{,}6^\circ \cdot 63 = 226{,}8^\circ; \qquad 3{,}6^\circ \cdot 16 = 57{,}6^\circ;$$
$$3{,}6^\circ \cdot 12 = 43{,}2^\circ; \qquad 3{,}6^\circ \cdot 9 = 32{,}4^\circ.$$

Можно предложить учащимся в порядке самоконтроля убедиться в том, что сумма полученных значений центральных углов равна 360°.

1055. (*Для работы в парах.*) Таблицы, содержащие данные о весе 30 мальчиков из оздоровительного лагеря, имеют следующий вид:

Вес, кг	Частота
20—22	4
22—24	7
24—26	4
26—28	4
28—30	7
30—32	4

Вес, кг	Частота
20—23	6
23—26	9
26—29	8
29—32	7

Гистограммы, соответствующие этим таблицам, приведены на рисунке 11.

Сумма высот прямоугольников на первой гистограмме равна $4 + 7 + 4 + 4 + 7 + 4$, т. е. 30, на второй гистограмме — $6 + 9 + 8 + 7$, т. е. 30.

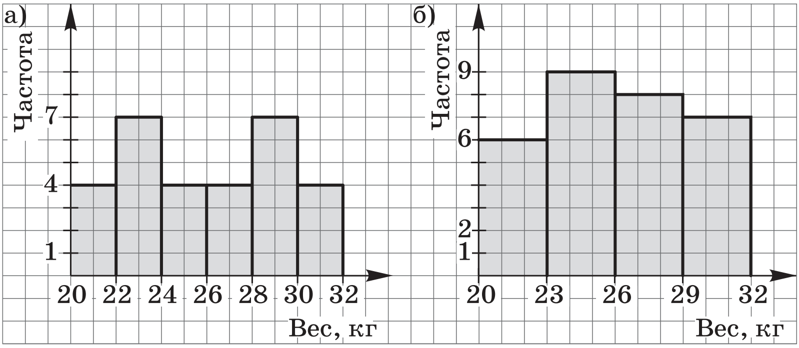


Рис. 11

Таким образом, гистограммы различаются числом прямоугольников, длиной их оснований и высотами, но имеют одинаковые суммы высот всех прямоугольников.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

1101. Пусть было x ящиков с тремя бракованными деталями, тогда с двумя бракованными деталями было $2x$ ящиков. Имеем уравнение

$$\frac{0 \cdot 12 + 1 \cdot 28 + 2 \cdot 2x + 3x + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 2}{12 + 28 + 2x + x + 7 + 2} = 1{,}85.$$

После упрощения получаем уравнение $66 + 7x = 90{,}65 + 5{,}55x$. Откуда находим $x = 17$.

Значит, было 17 ящиков с тремя бракованными деталями и 34 ящика с двумя бракованными деталями.

Мода ряда равна 2, т. е. больше всего было ящиков с двумя бракованными деталями. Размах ряда равен 5.

1102. Обозначим через x среднее из трёх стёртых чисел, тогда предыдущее число было равно $(x - 4)$, а последующее — $(x + 3)$. Выразим среднее арифметическое данного ряда через x и упростим полученное выражение:

$$\frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot (x - 4) + 2x + 3(x + 3) + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 4}{4 + (x - 4) + x + (x + 3) + 7 + 4} = \frac{6x + 53}{3x + 14}.$$

Получим уравнение

$$\frac{6x + 53}{3x + 14} = 2{,}5.$$

Отсюда $x = 12$. Значит, пропущенные числа: 8, 12 и 15.

Мода ряда равна 3, так как это число повторяется наибольшее количество раз, а именно 15 раз. Размах этого ряда чисел равен 5.

1104. Средний годовой удой молока от одной коровы на ферме равен

$$\frac{500 \cdot 2 + 1500 \cdot 8 + 2500 \cdot 23 + 3500 \cdot 13 + 4500 \cdot 2}{2 + 8 + 23 + 13 + 2} \approx 2600 \text{ (л).}$$

1105. Гистограммы различаются количеством прямоугольников, их высотами и длинами оснований. Общим является сумма высот прямоугольников, так как она равна общему количеству опрошенных участников, т. е. 80.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 36

7. Общее число сотрудников предприятия, прошедших переподготовку, равно $60 + 70 + 130 + 40 = 300$ (чел.). Найдём значения относительных частот с точностью до 0,1 %:

$$\frac{60}{300} \cdot 100\% = 20\%; \quad \frac{70}{300} \cdot 100\% \approx 23{,}3\%;$$

$$\frac{130}{300} \cdot 100\% \approx 43{,}3\%; \quad \frac{40}{300} \cdot 100\% \approx 13{,}3\%.$$

Заметим, что полученная сумма относительных частот на 0,1 % отличается от 100 %, что является результатом округлений.

10. Пусть было x пакетов с тремя семенами сорных растений, тогда с четырьмя семенами сорных растений было $(x - 3)$ пакета. Выразим через x среднее арифметическое числа семян сорных растений в пакетах:

$$\frac{0 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3x + 4(x - 3) + 5 \cdot 6}{5 + 8 + 10 + x + (x - 3) + 6} = \frac{46 + 7x}{26 + 2x}.$$

По условию задачи в среднем в каждом пакете было по 2,6 семени сорных растений. Имеем уравнение $\frac{46 + 7x}{26 + 2x} = 2{,}6$. Отсюда $x = 12$.

Значит, было 12 пакетов с тремя семенами сорных растений и 9 пакетов с четырьмя.

Пункт 37

4. Для построения круговой диаграммы определим величину центрального угла, соответствующего каждому результату. Так как общему количеству игр соответствует угол 360°, то одной игре соответствует угол 360° : 15, т. е. 24°.

Тогда 6 победам соответствует угол $24^\circ \cdot 6$, т. е. 144°, 3 поражениям — угол $24^\circ \cdot 3$, т. е. 72°, а 6 ничьим — угол 144°.

Можно предложить учащимся убедиться в том, что сумма значений центральных углов равна 360°.

Для тех, кто хочет знать больше

Пункт 42. Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их свойства

Пункт 43. Дисперсия и среднее квадратичное отклонение

Методический комментарий

Главу V завершают два пункта, предназначенные для учащихся, интересующихся математикой, — пункт 42 «Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их свойства» и пункт 43 «Дисперсия и среднее квадратичное отклонение».

В пункте 42 углубляются знания о функциях, полученные учащимися в курсе алгебры 7 и 8 классов. Рассматриваются свойства функций $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$. Функция $y = x^{-1}$ является частным случаем обратной пропорциональности, задаваемой формулой $y = \frac{k}{x}$ с коэффициентом k, равным 1. Приведённые здесь свойства 1, 2 и 3 являются фактически повторением известных учащимся свойств обратной пропорциональности, задаваемой формулой $y = \frac{1}{x}$. Интересным для учащихся является свойство 4, заключающееся в том, что любое значение аргумента x и соответствующее ему значение функции y, заданной формулой $y = x^{-1}$, являются взаимно обратными числами. Отсюда вытекает специфическая особенность графика функции $y = x^{-1}$, состоящая в том, что этот график симметричен относительно прямой $y = x$.

Интересными для учащихся являются также рассмотренные в пункте 42 сведения о свойствах функции $y = x^{-2}$ и её графике. Учащиеся узнают, что график этой функции, аналогично графику обратной пропорциональности, состоит из двух ветвей. Однако этот график существенно отличается от знакомой учащимся гиперболы, так как его ветви симметричны относительно оси y. Учащимся предлагаются разнообразные упражнения, связанные со свойствами функций $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$ и их графиками.

Изучение данного пункта можно провести в форме занятия математического кружка, на котором учащиеся заслушают сообщения двух одноклассников, один из которых расскажет о свойствах и графике функции $y = x^{-1}$, а другой — о свойствах и графике функции $y = x^{-2}$. После этого можно выполнить с учащимися некоторые из упражнений, представленных в пункте 42.

В качестве дополнения к главе V в учебник включён также пункт 43 «Дисперсия и среднее квадратичное отклонение», в котором расширяются известные учащимся сведения из статистики. В курсе алгебры 7 и 8 классов они познакомились с такими статистическими характеристиками, как среднее арифметическое, размах, мода и медиана, получили представление о сборе и обработке статистических данных, о наглядной интерпретации статистической информации.

В пункте 43 впервые рассматривается вопрос об отличии членов ряда от его среднего арифметического, или, как говорят, об их отклонении от среднего арифметического. На примере показано, что это отклонение может выражаться положительным или отрицательным числом. В частных случаях оно может оказаться равным нулю. Внимание учащихся обращается на то, что сумма отклонений членов ряда от среднего арифметического равна нулю и потому не может использоваться при оценке разброса данных в числовом ряду. Для того чтобы оценить разброс данных в числовом ряду, составляют новый ряд, членами которого служат квадраты отклонений членов исследуемого ряда от его среднего арифметического, и вычисляют среднее арифметическое составленного ряда. Полученное число называют дисперсией ряда данных.

Учащиеся узнают также, что при оценке данных используется ещё один показатель — среднее квадратичное отклонение числового ряда. Средним квадратичным отклонением ряда данных называют квадратный корень из дисперсии этого ряда.

Изучению пункта 43 рекомендуется посвятить специальное занятие математического кружка. Одному из членов кружка можно поручить ознакомить учащихся с понятиями дисперсии и среднего квадратичного отклонения. Далее под руководством учителя члены кружка могут выполнить задания **1072** и **1078**. При наличии времени они могут приступить к выполнению некоторых из оставшихся заданий пункта 43.

Ознакомление с пунктами 42 и 43, дополняющими главу V, позволяет учащимся, интересующимся математикой, подняться на новую ступень в достижении личностных, метапредметных и предметных результатов обучения, определяемых Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования.

Указания к упражнениям учебника

1062. Точки $A\left(a;\ \frac{1}{247}\right)$ и $B(843;\ b)$ принадлежат гиперболе $y = x^{-1}$, следовательно, $\frac{1}{247} = a^{-1}$ и $b = 843^{-1}$. Отсюда $a = 247;\ b = \frac{1}{843}$.

1063. Равенство $x = x^{-1}$ верно при двух значениях аргумента: $x = -1$ и $x = 1$.

а) Если $x > 0$, то $x > x^{-1}$ при $x > 1$ и $x < x^{-1}$ при $x < 1$;

б) если $x < 0$, то $x > x^{-1}$ при $-1 < x < 0$ и $x < x^{-1}$ при $x < -1$.

1064. Выполнение этого задания сводится к решению уравнения с параметром:

$$-x + l = \frac{1}{x}; \quad \frac{x^2 - lx + 1}{x} = 0; \quad x^2 - lx + 1 = 0; \quad D = l^2 - 4;$$

$l^2 - 4 > 0$ при $l < -2$ и $l > 2$; $l^2 - 4 = 0$ при $l = -2$ и $l = 2$; $l^2 - 4 < 0$ при $-2 < l < 2$.

Отсюда получаем:

а) если $l > 2$, то прямая и гипербола имеют две общие точки;

б) если $l = 2$, то они имеют одну общую точку;

в) если $0 < l < 2$, то прямая и гипербола не имеют общих точек.

1066. График состоит из двух ветвей, расположенных симметрично относительно оси y.

1067. При построении графиков можно воспользоваться рисунками 56 и 57 учебника. Из графиков видно, что $x^{-1} < x^{-2}$, если $0 < x < 1$; $x^{-1} > x^{-2}$, если $x > 1$.

1068. Точки $A\left(a;\ \frac{1}{2601}\right)$ и $B(0{,}0625;\ b)$ принадлежат графику функции $y = x^{-2}$, т. е. $\frac{1}{2601} = a^{-2}$ и $b = 0{,}0625^{-2}$. Отсюда $a = 51;\ b = 256$.

1069. а) $0 < x_0 < 1$.

Умножая все члены этого двойного неравенства на положительное число x_0, найдём, что $0 < x_0^2 < x_0$. Учитывая, что $x_0 < 1$, получим $x_0^2 < x_0 < 1$, т. е. $x_0^2 < x_0 < x_0^0$.

Так как $0 < x_0 < 1$, то $\frac{1}{x_0} > 1$, т. е. $x_0^{-1} > x_0^0$. Умножая обе части этого неравенства на x_0^{-1}, получим, что $x_0^{-2} > x_0^{-1}$. Итак, указанные числа располагаются в порядке возрастания следующим образом: $x_0^2,\ x_0,\ x_0^0,\ x_0^{-1},\ x_0^{-2}$;

б) рассуждая аналогично, получим, что при $x_0 > 1$ указанные числа располагаются в порядке возрастания следующим образом: $x_0^{-2},\ x_0^{-1},\ x_0^0,\ x_0,\ x_0^2$.

1070. $y = \begin{cases} x^{-2}, \text{ если } -2 \leqslant x < -1, \\ x^2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^{-2}, \text{ если } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

График этой функции состоит из трёх частей: в промежутке $[-2;\ -1)$ он является частью графика функции $y = x^{-2}$; в промежутке $[-1;\ 1]$ он является частью параболы $y = x^2$; в промежутке $(1;\ 2]$ он является частью графика функции $y = x^{-2}$. Отсюда следует, что:

а) с прямой $y = 2$ график не имеет общих точек;

б) с прямой $y = 1$ график имеет две общие точки;

в) с прямой $y = \frac{1}{2}$ график имеет четыре общие точки;

г) с прямой $y = 0$ график имеет одну общую точку.

1071. $y = \begin{cases} x^{-1}, \text{ если } x < -\frac{1}{2}, \\ 4x, \text{ если } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ x^{-1}, \text{ если } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

График этой функции состоит из трёх частей: в промежутке $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$ он представляет собой часть ветви гиперболы $y = x^{-1}$, расположенной в III координатной четверти; в промежутке $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ он является отрезком прямой $y = 4x$; в промежутке $\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ он является частью ветви гиперболы $y = x^{-1}$, расположенной в I координатной четверти. Отсюда следует, что:

а) уравнение $y = 2$ имеет один корень;

б) уравнение $y = \frac{1}{3}$ имеет два корня;

в) уравнение $y = 0$ имеет один корень;
г) уравнение $y = -3$ не имеет корней.

1072. Вычислим среднее арифметическое данного ряда:

$$\frac{5+6+8+10+7+2}{6} = \frac{38}{6} = 6\frac{1}{3}.$$

Найдём отклонения каждого члена ряда от среднего арифметического.

$$5 - 6\frac{1}{3} = -1\frac{1}{3}; \qquad 6 - 6\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}; \qquad 8 - 6\frac{1}{3} = 1\frac{2}{3};$$

$$10 - 6\frac{1}{3} = 3\frac{2}{3}; \qquad 7 - 6\frac{1}{3} = \frac{2}{3}; \qquad 2 - 6\frac{1}{3} = -4\frac{1}{3}.$$

Определим сумму квадратов этих отклонений:

$$\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{11}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{13}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{16+1+25+121+4+169}{9} = 37\frac{1}{3}.$$

Дисперсия ряда равна

$$37\frac{1}{3} : 6 = \frac{112}{3 \cdot 6} = 6\frac{2}{9}.$$

1073. б) Среднее арифметическое ряда данных равно

$$\frac{-4-1-2+7+5+4}{6} = \frac{9}{6} = 1{,}5.$$

Найдём сумму квадратов отклонений членов этого ряда от среднего арифметического:

$$(-5{,}5)^2 + (-2{,}5)^2 + (-3{,}5)^2 + 5{,}5^2 + 3{,}5^2 + 2{,}5^2 = 97{,}5.$$

Дисперсия ряда равна $\frac{97{,}5}{6}$, т. е. 16,25.

1075. Вычислим среднее арифметическое, сумму квадратов отклонений каждого члена ряда от среднего арифметического и дисперсию для ряда данных, характеризующих средние месячные температуры первого полугодия в Москве.

Среднее арифметическое равно

$$\frac{-9{,}3-8{,}6-3{,}4+5{,}1+12{,}4+16{,}7}{6} = \frac{12{,}9}{6} = 2{,}15;$$

сумма квадратов отклонений каждого члена ряда от среднего арифметического равна

$$(-9{,}3-2{,}15)^2+(-8{,}6-2{,}15)^2+(-3{,}4-2{,}15)^2+(5{,}1-2{,}15)^2+$$
$$+(12{,}4-2{,}15)^2+(16{,}7-2{,}15)^2=602{,}935;$$

дисперсия ряда равна $\dfrac{602{,}935}{6}\approx 100{,}5.$

Вычислим теперь эти характеристики для ряда данных, характеризующих средние месячные температуры первого полугодия в Хабаровске.

Среднее арифметическое равно

$$\frac{-22{,}3-17{,}2-8{,}5+3{,}1+11{,}1+17{,}4}{6}=-16{,}4;$$

сумма квадратов отклонений каждого члена ряда от среднего арифметического равна

$$(-22{,}3+16{,}4)^2+(-17{,}2+16{,}4)^2+(-8{,}5+16{,}4)^2+$$
$$+(3{,}1+16{,}4)^2+(11{,}1+16{,}4)^2+(17{,}4+16{,}4)^2=$$
$$=(-5{,}9)^2+(-0{,}8)^2+7{,}9^2+19{,}5^2+27{,}5^2+33{,}8^2=2376{,}8;$$

дисперсия ряда равна $\dfrac{2376{,}8}{6}\approx 396{,}1.$

Значение дисперсии ряда температур для Хабаровска почти в 4 раза превышает значение дисперсии ряда температур для Москвы. Это свидетельствует о более резких колебаниях средних месячных температур в Хабаровске по сравнению с Москвой.

1076. а) Среднее арифметическое ряда равно

$$\frac{-5-8+6+7+4+3}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}.$$

Сумма квадратов отклонений членов ряда от среднего арифметического равна

$$\left(-6\frac{1}{6}\right)^2+\left(-9\frac{1}{6}\right)^2+\left(4\frac{5}{6}\right)^2+\left(5\frac{5}{6}\right)^2+\left(2\frac{5}{6}\right)^2+\left(1\frac{5}{6}\right)^2=$$

$$=\frac{37^2+55^2+29^2+35^2+17^2+11^2}{36}=\frac{6870}{36}=190\frac{5}{6}.$$

Дисперсия ряда равна $190\dfrac{5}{6}:6=\dfrac{1145}{36}\approx 31{,}8.$

Найдём среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma\approx\sqrt{31{,}8}\approx 5{,}6.$$

1078. Рассмотрим для примера ряд чисел: 1, 3, 6, 8, –1, –2.

Среднее арифметическое этого ряда равно

$$\frac{1+3+6+8-1-2}{6}=\frac{15}{6}=2{,}5.$$

Сумма квадратов отклонений каждого числа этого ряда от среднего арифметического равна

$$(-1{,}5)^2+0{,}5^2+3{,}5^2+5{,}5^2+(-3{,}5)^2+(-4{,}5)^2=$$
$$=2{,}25+0{,}25+12{,}25+30{,}25+12{,}25+20{,}25=77{,}5.$$

Дисперсия этого ряда чисел равна $\frac{77{,}5}{6}\approx 12{,}9.$

Увеличим каждое число данного ряда на 4. Получим ряд: 5, 7, 10, 12, 3, 2.

Среднее арифметическое равно

$$\frac{5+7+10+12+3+2}{6}=\frac{39}{6}=6{,}5.$$

Найдём сумму квадратов отклонений членов нового ряда от его среднего арифметического:

$$(5-6{,}5)^2+(7-6{,}5)^2+(10-6{,}5)^2+(12-6{,}5)^2+$$
$$+(3-6{,}5)^2+(2-6{,}5)^2=(-1{,}5)^2+0{,}5^2+$$
$$+3{,}5^2+5{,}5^2+(-3{,}5)^2+(-4{,}5)^2=77{,}5.$$

Дисперсия нового ряда чисел равна $\frac{77{,}5}{6}\approx 12{,}9.$

Дисперсия не изменилась.

Докажем, что если каждое число ряда x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 увеличить на положительное число a, то дисперсия не изменится. Запишем новый ряд чисел:

$$x_1+a,\ x_2+a,\ x_3+a,\ x_4+a,\ x_5+a,\ x_6+a.$$

Вычислим среднее арифметическое этого ряда:

$$\frac{(x_1+a)+(x_2+a)+(x_3+a)+(x_4+a)+(x_5+a)+(x_6+a)}{6}.$$

Выполнив преобразования, получим, что среднее арифметическое нового ряда равно $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}+a$.

Среднее арифметическое увеличилось на a. Отклонения членов ряда от среднего арифметического не изменятся, следовательно, не изменится и дисперсия.

Задачи повышенной трудности

Указания и решения

1106. а) Представим слагаемое a^2x^2 в виде разности $2a^2x^2 - a^2x^2$ и применим в числителе дроби формулы квадрата суммы и разности квадратов, а в знаменателе — формулу суммы кубов. Получим

$$\frac{x^4 + a^2x^2 + a^4}{x^3 + a^3} = \frac{x^4 + 2a^2x^2 + a^4 - a^2x^2}{x^3 + a^3} =$$

$$= \frac{(x^2 + a^2)^2 - a^2x^2}{x^3 + a^3} = \frac{(x^2 + a^2 - ax)(x^2 + a^2 + ax)}{(x + a)(x^2 + a^2 - ax)} = \frac{x^2 + a^2 + ax}{x + a};$$

б) вынесем за скобки в числителе a^{n-1}, а в знаменателе a^n. Получим

$$\frac{8a^{n+2} + a^{n-1}}{16a^{n+4} + 4a^{n+2} + a^n} = \frac{a^{n-1}(8a^3 + 1)}{a^n(16a^4 + 4a^2 + 1)}.$$

Преобразуем трёхчлен, стоящий в знаменателе дроби:

$$16a^4 + 4a^2 + 1 = 16a^4 + 8a^2 + 1 - 4a^2 = (4a^2 + 1)^2 - 4a^2 =$$
$$= (4a^2 + 1 - 2a)\,(4a^2 + 1 + 2a).$$

Имеем

$$\frac{a^{n-1}(8a^3 + 1)}{a^n(16a^4 + 4a^2 + 1)} = \frac{(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)}{a(4a^2 + 1 - 2a)(4a^2 + 1 + 2a)} = \frac{2a + 1}{4a^3 + 2a^2 + a}.$$

1107. Сложив все пять уравнений системы, получим

$$4x + 4y + 4z + 4u + 4v = 12, \text{ или } x + y + z + u + v = 3.$$

Вычитая из этого уравнения поочерёдно все уравнения данной системы, получим значения неизвестных: $v = -2$, $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$, $u = -1$.

1108. Предположим, что a — корень данного уравнения и $a < 0$. Тогда верно равенство $a^4 - 5a^3 - 4a^2 - 7a + 4 = 0$.

Преобразуем левую часть этого равенства:

$$a^4 - 5a^3 - 4a^2 - 7a + 4 = (a^4 - 4a^2 + 4) - (5a^3 + 7a) =$$
$$= (a^2 - 2)^2 - (5a^3 + 7a).$$

Эта разность принимает только положительные значения, так как $(a^2 - 2)^2 \geqslant 0$, а $5a^3 + 7a < 0$.

Получили противоречие с равенством $a^4 - 5a^3 - 4a^2 - 7a + 4 = 0$. Следовательно, наше предположение неверно, и уравнение не имеет отрицательных корней.

1109. Требуется найти такую дробь $\frac{x}{21}$, где x — натуральное число, чтобы выполнялось двойное неравенство

$$\frac{5}{14} < \frac{x}{21} < \frac{5}{12}; \qquad \frac{5}{2 \cdot 7} < \frac{x}{3 \cdot 7} < \frac{5}{3 \cdot 4}.$$

Приведём эти дроби к общему знаменателю 84:

$$\frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 7 \cdot 4} < \frac{x \cdot 4}{3 \cdot 7 \cdot 4} < \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 4 \cdot 7}.$$

Отсюда $30 < 4x < 35; \quad 7\frac{1}{2} < x < 8\frac{3}{4}$.

В этом промежутке есть только одно натуральное число $x = 8$. Значит, искомая дробь $\frac{8}{21}$.

1110. Представим число 54^{35} как $(54^2)^{17} \cdot 54$. Так как 54^2 оканчивается цифрой 6, а любая натуральная степень числа 6 также оканчивается цифрой 6, то число $(54^2)^{17}$ оканчивается цифрой 6, а произведение $(54^2)^{17} \cdot 54$ оканчивается цифрой 4.

Представим число 28^{21} как $(28^4)^5 \cdot 28$. Число 28^4 оканчивается цифрой 6, следовательно, число $(28^4)^5$ также оканчивается цифрой 6, а произведение $(28^4)^5 \cdot 28$ оканчивается цифрой 8.

Сумма $54^{35} + 28^{21}$ оканчивается цифрой 2, так как $4 + 8 = 12$.

1111. Преобразуем левую часть данного уравнения:

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = \\ = (x - 1)^2 + (y - 2)^2.$$

Так как при любых значениях x и y верны неравенства $(x - 1)^2 \geqslant 0$ и $(y - 2)^2 \geqslant 0$, то уравнение $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$ имеет единственное решение: $x = 1$; $y = 2$.

1112. Введём новую переменную $y = x + \frac{1}{x}$. Тогда $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, отсюда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$x^2 - 2x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - 13 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 13 = y^2 - 2y - 15.$$

Уравнение $y^2 - 2y - 15 = 0$ имеет два корня: $y_1 = -3$; $y_2 = 5$.

Решим два уравнения: $x + \frac{1}{x} = -3$ и $x + \frac{1}{x} = 5$.

Корни первого уравнения $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, а корни второго уравнения $x_3 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$, $x_4 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

Исходное уравнение имеет четыре корня.

1113. Преобразуем дробь

$$\frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{10a+b}{a+b} = \frac{10a+10b-9b}{a+b} = \frac{10(a+b)-9b}{a+b} = 10 - \frac{9b}{a+b}.$$

Эта разность является целым числом, если число $(a+b)$ есть делитель числа 9, т. е. равно одному из чисел 1, 3, 9.

Но $a+b \neq 1$, так как число $\overline{ab}$ — двузначное и $b > a$.

Если $a+b=3$, то возможен один вариант: $a=1$, $b=2$.

Если $a+b=9$, то возможны варианты:

$a=1$, $b=8$; $a=2$, $b=7$; $a=3$, $b=6$; $a=4$, $b=5$.

Имеем множество искомых двузначных чисел $A = \{12;\ 18;\ 27;\ 36;\ 45\}$. Однако здесь представлены не все ответы, поскольку мы не можем рассмотреть случай, когда $(a+b)$ является делителем числа b.

Преобразуем заданную дробь другим способом:

$$\frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{10a+b}{a+b} = \frac{a+b+9b}{a+b} = 1 + \frac{9}{1+\frac{b}{a}}.$$

Сумма $1 + \frac{9}{1+\frac{b}{a}}$ является целым числом, если $\left(1+\frac{b}{a}\right)$ есть делитель числа 9, т. е. одно из чисел 1, 3, 9.

Если $1+\frac{b}{a}=3$, то $\frac{b}{a}=2$. Возможны варианты: $a=1$, $b=2$; $a=2$, $b=4$; $a=3$, $b=6$; $a=4$, $b=8$. Если $1+\frac{b}{a}=9$, то $\frac{b}{a}=8$. Возможен один вариант: $a=1$, $b=8$.

Получаем множество искомых двузначных чисел $B = \{12;\ 18;\ 24;\ 36;\ 48\}$. Ответом служит множество $C = A \cup B = \{12;\ 18;\ 24;\ 27;\ 36;\ 45;\ 48\}$.

Учащиеся могут предложить другой способ решения этой задачи.

Выпишем все двузначные числа $\overline{ab}$, в которых $b > a$:

12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29,
34, 35, 36, 37, 38, 39, 45, 46, 47, 48, 49, 56, 57, 58, 59,
67, 68, 69, 78, 79, 89.

Вычеркнем из этого ряда простые числа. Получим

12, 14, 15, 16, 18, 24, 25, 26, 27, 28, 34, 35, 36,
38, 39, 45, 46, 48, 49, 56, 57, 58, 68, 69, 78.

Из оставшихся чисел подбором находим искомые двузначные числа. Это

12, 18, 24, 27, 36, 45, 48.

1114. Обозначим искомые дроби через $\frac{x}{x+1}$, $\frac{y}{y+1}$, $\frac{z}{z+1}$, а их сумму через n, где n — натуральное число. Имеем

$$\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=n.$$

Каждая из дробей меньше 1, так как её числитель меньше знаменателя. Следовательно, $n<3$.

С другой стороны,

$$\frac{x}{x+1}\geqslant\frac{x}{2x}=\frac{1}{2},\quad \frac{y}{y+1}\geqslant\frac{1}{2},\quad \frac{z}{z+1}\geqslant\frac{1}{2},$$

следовательно, $n\geqslant\frac{3}{2}$.

Итак, $\frac{3}{2}\leqslant n<3$. В этом промежутке есть только одно натуральное число: $n=2$.

Преобразуем сумму

$$\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=1-\frac{1}{x+1}+1-\frac{1}{y+1}+1-\frac{1}{z+1}=$$
$$=3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right).$$

Отсюда сумма трёх дробей $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}$ равна 1. Есть только один вариант выполнения такого равенства:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1.$$

Получим $x=1$, $y=2$, $z=5$. Искомые дроби: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{6}$.

1115. После внесения множителя 2 под знак радикала получим

$$y=\sqrt{20+\sqrt{364+24x-4x^2}}-\sqrt{20-\sqrt{364+24x-4x^2}}.$$

Применим дважды формулу двойного радикала:

$$\sqrt{\frac{20+\sqrt{36-24x+4x^2}}{2}}+\sqrt{\frac{20-\sqrt{36-24x+4x^2}}{2}}-$$

$$-\sqrt{\frac{20+\sqrt{36-24x+4x^2}}{2}}+\sqrt{\frac{20-\sqrt{36-24x+4x^2}}{2}}=$$

$$=2\sqrt{10-\sqrt{9-6x+x^2}}=2\sqrt{10-|x-3|}.$$

Рассмотрим два случая:

1) $x\geqslant 3$, тогда $|x-3|=x-3$ и

$$2\sqrt{10-|x-3|}=2\sqrt{10-x+3}=2\sqrt{13-x}.$$

Имеем $y=2\sqrt{13-x}$, $3\leqslant x\leqslant 13$.

Условию задачи удовлетворяют четыре числа из этого промежутка: 4, 9, 12 и 13;

2) $x<3$, тогда $|x-3|=3-x$ и

$$2\sqrt{10-|x-3|}=2\sqrt{10-3+x}=2\sqrt{7+x}.$$

Имеем $y=2\sqrt{7+x}$, $-7\leqslant x<3$.

Условию задачи удовлетворяют четыре числа из этого промежутка: –7;–6; –3; 2.

Ответом служит объединение двух множеств значений x: –7; –6; –3; 2; 4; 9; 12; 13.

1116. Внесём множитель 2 под знак радикала и применим дважды формулу двойного радикала:

$$\sqrt{12+\sqrt{140+8x-4x^2}}-\sqrt{12-\sqrt{140+8x-4x^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{12+\sqrt{4-8x+4x^2}}{2}}+\sqrt{\frac{12-\sqrt{4-8x+4x^2}}{2}}-$$

$$-\sqrt{\frac{12+\sqrt{4-8x+4x^2}}{2}}+\sqrt{\frac{12-\sqrt{4-8x+4x^2}}{2}}=$$

$$=2\sqrt{6-\sqrt{x^2-2x+1}}=2\sqrt{6-|x-1|}.$$

Рассмотрим два случая:

1) $x\geqslant 1$, тогда $|x-1|=x-1$ и

$$2\sqrt{6-|x-1|}=2\sqrt{6-x+1}=2\sqrt{7-x}.$$

Имеем $y=2\sqrt{7-x}$, $1\leqslant x\leqslant 7$.

Условию задачи удовлетворяют числа 3, 6 и 7.

Если $x=3$, то $y=4$; если $x=6$, то $y=2$; если $x=7$, то $y=0$.

2) $x<1$, тогда $|x-1|=1-x$ и $2\sqrt{6-1+x}=2\sqrt{5+x}$.

Имеем $y=2\sqrt{5+x}$, $-5\leqslant x<1$.

Условию задачи удовлетворяют числа –5, –4 и –1.

Если $x=-5$, то $y=0$; если $x=-4$, то $y=2$; если $x=-1$, то $y=4$.

Итак, ответом служат значения y, равные 0, 2 и 4.

1117. $x^8+x^4+1=x^8+2x^4+1-x^4=(x^4+1)^2-x^4=$
$=(x^4+1-x^2)(x^4+1+x^2)=((x^2+1)^2-3x^2)((x^2+1)^2-x^2)=$
$=(x^2+1-x\sqrt{3})(x^2+1+x\sqrt{3})(x^2+1-x)(x^2+1+x)$.

1118. $$\frac{\left(p^2-\frac{1}{q^2}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\frac{1}{p^2}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^{p-q}}=\frac{\left(p-\frac{1}{q}\right)^p\left(p+\frac{1}{q}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q-\frac{1}{p}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^{p-q}}=$$

$$=\frac{\left(p-\frac{1}{q}\right)^q\left(p+\frac{1}{q}\right)^p}{\left(q-\frac{1}{p}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^p}=\left(\frac{p+\frac{1}{q}}{q+\frac{1}{p}}\right)^p\cdot\left(\frac{p-\frac{1}{q}}{q-\frac{1}{p}}\right)^q=\frac{(pq+1)^p\cdot p^p(pq-1)^q\cdot p^q}{q^p(pq+1)^p\cdot q^q(pq-1)^q}=$$

$$=\frac{p^{p+q}}{q^{p+q}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}.$$

Из условия следует, что $p\in\boldsymbol{Z}$, $q\in\boldsymbol{Z}$, $p\neq0$, $q\neq0$, $|p|\neq1$, $|q|\neq1$.

1119. Найдём разность

$$y_3-y_1=\frac{ax_3+b}{cx_3+d}-\frac{ax_1+b}{cx_1+d}=$$

$$=\frac{acx_1x_3+bcx_1+adx_3+bd-acx_1x_3-adx_1-bcx_3-bd}{(cx_3+d)(cx_1+d)}=$$

$$=\frac{ad(x_3-x_1)-bc(x_3-x_1)}{(cx_3+d)(cx_1+d)}=\frac{(x_3-x_1)(ad-bc)}{(cx_3+d)(cx_1+d)}.$$

Аналогично найдём

$$y_3-y_2=\frac{(x_3-x_2)(ad-bc)}{(cx_3+d)(cx_2+d)};\quad y_4-y_1=\frac{(x_4-x_1)(ad-bc)}{(cx_4+d)(cx_1+d)};$$

$$y_4-y_2=\frac{(x_4-x_2)(ad-bc)}{(cx_4+d)(cx_2+d)};$$

$$\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=\frac{(x_3-x_1)(ad-bc)(cx_3+d)(cx_2+d)}{(cx_3+d)(cx_1+d)(x_3-x_2)(ad-bc)}=\frac{(x_3-x_1)(cx_2+d)}{(x_3-x_2)(cx_1+d)};$$

$$\frac{y_4-y_1}{y_4-y_2}=\frac{(x_4-x_1)(cx_2+d)}{(x_4-x_2)(cx_1+d)}.$$

Разделим получившиеся дроби:

$$\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}:\frac{y_4-y_1}{y_4-y_2}=\frac{(x_3-x_1)(cx_2+d)(x_4-x_2)(cx_1+d)}{(x_3-x_2)(cx_1+d)(x_4-x_1)(cx_2+d)}=$$

$$=\frac{(x_3-x_1)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_4-x_1)}=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}:\frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}.$$

Условие $ad-bc\neq 0$ используется при сокращении дробей.

1120. Уравнение $x^2-y^2=69$ представим в виде $(x-y)\times\times(x+y)=69$. Так как $x-y<x+y$, возможны два варианта:

$$\begin{cases}x-y=1,\\x+y=69\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}x-y=3,\\x+y=23.\end{cases}$$

Решив первую систему, получим $x=35$, $y=34$. Решив вторую систему, получим $x=13$, $y=10$.

1121. Рассмотрим числа: $x=a+b\sqrt{2}$ и $y=c+d\sqrt{2}$, где a, b, c, d — рациональные числа.

Найдём сумму, разность, произведение и частное чисел x и y.

$$x+y=a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2}=(a+c)+(b+d)\sqrt{2},$$

$(a+c)$ и $(b+d)$ — рациональные числа как суммы рациональных чисел;

$$x-y=a+b\sqrt{2}-(c+d\sqrt{2})=(a-c)+(b-d)\sqrt{2},$$

$(a-c)$ и $(b-d)$ — рациональные числа как разности рациональных чисел;

$$x\cdot y=(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2},$$

$(ac+2bd)$ и $(bc+ad)$ — рациональные числа как результаты умножения и сложения рациональных чисел;

$$\frac{x}{y}=\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{c^2-2d^2}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2},$$

$\dfrac{ac-2bd}{c^2-2d^2}$ и $\dfrac{bc-ad}{c^2-2d^2}$ — рациональные числа как результаты умножения, вычитания и деления рациональных чисел.

1122. Пусть x_n, y_n — решение уравнения $(x+y\sqrt{2})\times$ $\times(x-y\sqrt{2})=1$. Тогда справедливо равенство

$$(x_n+y_n\sqrt{2})(x_n-y_n\sqrt{2})=1.$$

Пара чисел $x_1=3$, $y_1=2$ — решение этого уравнения, т. е. $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1$ — верное равенство. Возведя обе части этого равенства в степень n $(n\in \boldsymbol{N})$, получим $(3+2\sqrt{2})^n\times$ $\times(3-2\sqrt{2})^n=1$. Сравнивая равенства

$$(x_n+y_n\sqrt{2})(x_n-y_n\sqrt{2})=1 \text{ и } (3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n=1,$$

можно заключить, что

$$\begin{cases} x_n+y_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n, \\ x_n-y_n\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2})^n. \end{cases}$$

Решив данную систему, найдём, что

$$x_n=\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2},\ y=\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{2}.$$

Так как n — любое натуральное число, то уравнение имеет бесконечное множество решений.

Приведём в таблице несколько пар значений x_n и y_n, удовлетворяющих системе:

n	0	1	2	3	4
x_n	1	3	17	99	577
y_n	0	2	12	70	408

1123. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+x+m=0$. По теореме Виета $x_1+x_2=-1$, $x_1x_2=m$. Отсюда

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1-2m.$$

По условию $1-2m=13$, значит, $m=-6$.

1124. Введём новые переменные $u=x-a$ и $v=x+a$ и выразим через эти переменные $(x^2-a^2)^2$ и $4ax$:

$$(x^2-a^2)^2=(x-a)^2\ (x+a)^2=u^2v^2;$$
$$4ax=(x+a)^2-(x-a)^2=v^2-u^2.$$

Уравнение примет вид

$$u^2v^2=v^2-u^2+1;\quad u^2v^2-v^2+u^2-1=0;\quad (v^2+1)(u^2-1)=0;$$
$$v^2+1\neq 0;\quad u^2-1=0;\quad (u-1)(u+1)=0;\quad u_1=-1;\quad u_2=1.$$

Если $u=-1$, то $x-a=-1$, следовательно, $x=a-1$; если $u=1$, то $x-a=1$, следовательно, $x=a+1$.

1125. Преобразуем выражение, введя новую переменную $b=a-3\frac{1}{2}$, тогда $a=b+3\frac{1}{2}$, получим

$$(a-1)(a-2)(a-5)(a-6)+9=\left(b+2\frac{1}{2}\right)\left(b+1\frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times\left(b-1\frac{1}{2}\right)\left(b-2\frac{1}{2}\right)+9=\left(b^2-\frac{25}{4}\right)\left(b^2-\frac{9}{4}\right)+9=$$

$$=b^4-\frac{17}{2}b^2+\frac{225}{16}+9=\left(b^2-\frac{17}{4}\right)^2-\frac{289}{16}+\frac{225}{16}+9=$$

$$=\left(b^2-\frac{17}{4}\right)^2-4+9=\left(b^2-\frac{17}{4}\right)^2+5.$$

Наименьшее значение этого выражения равно 5. Такое значение выражение принимает при $b=\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$, т. е. при $a=\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{17})$.

1126. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+px+1=0$. По теореме Виета $x_1+x_2=-p$; $x_1x_2=1$, тогда

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2.$$

По условию $p^2-2=254$, отсюда $p^2=256$; $p_1=-16$; $p_2=16$.

1127. Уравнение $x^2+(a-1)x-2a=0$ имеет корни, если его дискриминант $D\geqslant 0$.

$$D=(a-1)^2+8a=a^2-2a+1+8a=a^2+6a+1.$$

Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. По теореме Виета $x_1+x_2=1-a$; $x_1x_2=-2a$, тогда

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(a-1)^2+4a=a^2+2a+1=(a+1)^2.$$

Получим уравнение $(a+1)^2=9$, корни которого $a_1=-4$ и $a_2=2$. Если $a=-4$, то $D=16-24+1=-7<0$, уравнение корней не имеет. Значит, сумма квадратов корней данного уравнения равна 9 при $a=2$.

1128. $x+\frac{1}{x}=n$; $n>2$; n — натуральное число.

$$x^2-nx+1=0; \quad D=n^2-4.$$

Корни уравнения являются иррациональными числами, если выражение (n^2-4) не является точным квадратом.

Предположим противное: уравнение имеет рациональные корни, т. е. $n^2 - 4 = a^2$, где a — натуральное число; $a \neq 0$, так как $n > 2$. Тогда $(n - a)(n + a) = 4$.

Так как $n - a < n + a$, то возможен лишь один вариант:

$$\begin{cases} n - a = 1, \\ n + a = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $n = 2{,}5$, $a = 1{,}5$. Это противоречит условию, что n — натуральное число. Противоречие доказывает, что корни уравнения x_1 и x_2 — иррациональные числа.

1129. Преобразуем выражение, стоящее в правой части:

$$\sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2} = \left|x + \sqrt{2}\right| + \left|x - \sqrt{2}\right|.$$

Если $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$, то $\left|x + \sqrt{2}\right| = x + \sqrt{2}$; $\left|x - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - x$. Тогда $y = x + \sqrt{2} + \sqrt{2} - x$, т. е. $y = 2\sqrt{2}$. Эта функция является линейной в заданном интервале.

1130. На рисунке 12 отмечены точки M и N — города, точка C — место, где автобус через 15 мин встретился с легковой машиной, точка D — место, где легковая машина догнала автобус после выезда из города M.

Обозначим расстояние между городами через x.

Автобус проехал расстояние MC за 15 мин со скоростью 40 км/ч, следовательно, $MC = 40 \cdot \frac{1}{4}$, т. е. $MC = 10$ км.

Тогда $CD = x - 10 - 20$, т. е. $CD = x - 30$ (км).

Расстояние CD автобус преодолел за $\frac{x - 30}{40}$ ч. Легковая машина до второй встречи с автобусом проделала путь $CM + MC + CD = 20 + x - 30$, т. е. $(x - 10)$ км, затратив на него $\frac{x - 10}{50}$ ч. Имеем уравнение $\frac{x - 10}{50} + \frac{1}{4} = \frac{x - 30}{40}$; $x = 160$.

Расстояние между городами M и N равно 160 км.

1131. На рисунке 13 обозначены точки: A — точка старта, B — точка финиша, C — точка, в которой мальчик, стартовавший вторым, догнал первого мальчика, D — точка, в которой мальчик, стартовавший вторым, встретил первого мальчика на пути из точки B.

Рис. 12

Рис. 13

Пусть v_1 м/с — скорость первого мальчика, v_2 м/с — скорость второго мальчика, x м — расстояние BD. Время, затраченное первым мальчиком на путь AC, равно $\frac{10}{v_1}$ с, а вторым мальчиком — $\frac{10}{v_2}$ с. На основании условия составим первое уравнение: $\frac{10}{v_1} - \frac{10}{v_2} = 1$.

Найдём время, затраченное вторым мальчиком на путь от точки C до точки B и от точки B до точки D. Это время равно $\left(\frac{40}{v_2} + \frac{x}{v_2}\right)$ с. Время, прошедшее с момента старта первого мальчика до его встречи со вторым в точке D, равно $\frac{50 - x}{v_1}$ с, или 10 с. Имеем второе уравнение: $\frac{50 - x}{v_1} = 10$.

С другой стороны, время, затраченное первым мальчиком на путь CD, равно $\frac{40 - x}{v_1}$ с, и оно равно $\left(\frac{40}{v_2} + \frac{x}{v_2}\right)$ с. Отсюда имеем третье уравнение: $\frac{40 - x}{v_1} = \frac{40 + x}{v_2}$.

Получаем систему трёх уравнений с тремя неизвестными x, v_1 и v_2:

$$\begin{cases} \frac{10}{v_1} - \frac{10}{v_2} = 1, \\ \frac{50 - x}{v_1} = 10, \\ \frac{40 - x}{v_1} = \frac{40 + x}{v_2}. \end{cases}$$

Преобразуем третье уравнение системы:

$$\frac{40}{v_1} - \frac{x}{v_1} = \frac{40}{v_2} + \frac{x}{v_2}; \quad \frac{40}{v_1} - \frac{40}{v_2} = \frac{x}{v_2} + \frac{x}{v_1}; \quad 4\left(\frac{10}{v_1} - \frac{10}{v_2}\right) = \frac{x}{v_1} + \frac{x}{v_2};$$

$$\frac{x}{v_1} + \frac{x}{v_2} = 4; \quad x\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = 4.$$

Выразим из второго уравнения системы x через v_1, а из первого — v_2 через v_1 и подставим эти выражения в третье уравнение:

$$x = 50 - 10v_1, \quad v_2 = \frac{10v_1}{10 - v_1}; \quad (50 - 10v_1)\left(\frac{1}{v_1} + \frac{10 - v_1}{10v_1}\right) = 4.$$

После упрощения получаем квадратное уравнение $v_1^2 - 29v_1 + 100 = 0$, корни которого 4 и 25.

Второй корень не соответствует смыслу задачи, так как значение разности $50 - 10v_1$ должно быть положительным числом. Отсюда $v_1 = 4$ м/с, $x = 50 - 40$, т. е. $x = 10$ м.

Значит, второй мальчик встретил первого на расстоянии 10 м от точки финиша.

1132. Пусть расстояние между пристанями A и B равно s км, собственная скорость теплохода x км/ч, а скорость течения реки, т. е. скорость движения плота, — y км/ч. Тогда скорость теплохода по течению реки равна $\frac{s}{5}$ км/ч, а против течения реки — $\frac{s}{6}$ км/ч.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} x + y = \dfrac{s}{5}, \\ x - y = \dfrac{s}{6}. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения системы второе, получим $2y = \frac{s}{5} - \frac{s}{6}$. Отсюда $y = \frac{s}{60}$.

Это означает, что расстояние между пристанями A и B плот проплывает за 60 ч.

1133. Пусть собственная скорость катера равна x км/ч, скорость течения реки, т. е. скорость плота, плывущего по течению, — y км/ч. Обозначим t ч — время, затраченное катером на путь 90 км и на путь 70 км. Тогда $t = \frac{90}{x+y}$ и $t = \frac{70}{x-y}$.

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{90}{t}, \\ x - y = \dfrac{70}{t}. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе, получим $2y = \frac{90}{t} - \frac{70}{t}$. Отсюда $y = \frac{10}{t}$.

Следовательно, за t ч плот может проплыть 10 км.

1134. Обозначим через x км/ч скорость первого велосипедиста, через y км/ч скорость второго велосипедиста, через s км расстояние между пунктами A и B.

На рисунке 14 точка C — место первой встречи велосипедистов, точка D — место их второй встречи. Известно, что расстояние $AD = 18$ км, $CB = 30$ км. Тогда $AC = (s - 30)$ км, $CD = (s - 48)$ км.

До встречи в точке C первый велосипедист проехал $(s - 30)$ км за $\frac{s-30}{x}$ ч, а второй велосипедист проехал 30 км за $\frac{30}{y}$ ч. Имеем уравнение $\frac{s-30}{x} = \frac{30}{y}$. Выразим из него отношение $\frac{x}{y}$, получим $\frac{x}{y} = \frac{s-30}{30}$.

После встречи в точке C до встречи в точке D первый велосипедист проехал расстояние $2CB + CD = 60 + (s - 48)$, т. е. $(s + 12)$ км, за $\frac{s+12}{x}$ ч, а второй велосипедист проехал расстояние $AC + AD = s - 30 + 18$, т. е. $(s - 12)$ км, за $\frac{s-12}{y}$ ч. Имеем уравнение $\frac{s+12}{x} = \frac{s-12}{y}$. Выразим из него отношение $\frac{x}{y}$, получим $\frac{x}{y} = \frac{s+12}{s-12}$.

Итак, имеем уравнение

$$\frac{s-30}{30} = \frac{s+12}{s-12};$$

$$s^2 - 30s - 12s + 360 = 30s + 360;$$

$$s^2 - 72s = 0;\ s_1 = 0;\ s_2 = 72.$$

Первый корень не соответствует смыслу задачи. Значит, расстояние между пунктами A и B равно 72 км.

1135. На рисунке 15 изображены пункты A и B и точка C — место встречи мотоциклистов. Пусть x км/ч — скорость первого мотоциклиста, а y км/ч — скорость второго.

Из условия задачи следует, что расстояние $CB = 2{,}5x$, а расстояние $AC = 1{,}6y$. Первый мотоциклист проехал до встречи $1{,}6y$ км со скоростью x км/ч, а второй проехал $2{,}5x$ км со скоростью y км/ч, следовательно, $\frac{1{,}6y}{x} = \frac{2{,}5x}{y}$.

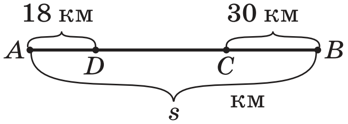


Рис. 14

Рис. 15

Отсюда

$$2{,}5x^2 = 1{,}6y^2; \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{1{,}6}{2{,}5}; \quad \frac{x}{y} = \frac{4}{5}.$$

Обозначим через t ч время, затраченное мотоциклистами до встречи в точке C (с начала движения). Первый мотоциклист был в пути $(t + 2{,}5)$ ч, а второй — $(t + 1{,}6)$ ч. Расстояние $AB = x(t + 2{,}5) = y(t + 1{,}6)$. Отсюда $\frac{t + 1{,}6}{t + 2{,}5} = \frac{x}{y}$, т. е. $\frac{t + 1{,}6}{t + 2{,}5} = \frac{4}{5}$.

$$5t + 8 = 4t + 10; \quad t = 2.$$

Значит, первый мотоциклист был в пути 4,5 ч, а второй — 3,6 ч.

1136. На рисунке 16 изображены пункты A и B и точка C — место встречи автомобилей. Пусть x км/ч — скорость автомобиля, вышедшего из пункта A, а kx км/ч — скорость другого автомобиля $(k > 1)$, тогда расстояние $AC = 3x$ км, а $CB = 3kx$ км. Имеем уравнение

$$\frac{CB}{x} - 1{,}1 = \frac{AC}{kx};$$

$$\frac{3kx}{x} - 1{,}1 = \frac{3x}{kx}; \quad 3k - 1{,}1 = \frac{3}{k};$$

$$3k^2 - 1{,}1k - 3 = 0;$$

$$D = 1{,}21 + 36 = 37{,}21;$$

$$k_1 = -\frac{5}{6}; \quad k_2 = 1{,}2.$$

Рис. 16

Отрицательный корень не соответствует смыслу задачи. Значит, скорость второго автомобиля больше скорости первого в 1,2 раза.

1137. Пусть x ч — время, за которое может выполнить всю работу первый самосвал, тогда второй самосвал может выполнить всю работу за $(x + 3)$ ч. За 1 ч первый самосвал может выполнить $\frac{1}{x}$ часть работы, а второй самосвал — $\frac{1}{x+3}$ часть работы. При совместной работе оба самосвала за 1 ч могут выполнить $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right)$ часть работы, т. е. $\frac{2x+3}{x(x+3)}$ часть работы. Следовательно, при совместной работе двум самосвалам для выполнения задания потребуется

$$1 : \frac{2x+3}{x^2+3x} = \frac{x^2+3x}{2x+3} \text{ (ч).}$$

Треть всей работы первый самосвал может выполнить за $\frac{x}{3}$ ч, а оставшуюся часть работы второй самосвал может выполнить за $\frac{2(x+3)}{3}$ ч. Имеем уравнение

$$\frac{x}{3}+\frac{2}{3}(x+3)-7\frac{1}{3}=\frac{x^2+3x}{2x+3};$$

$$3x^2-32x-48=0; \quad x_1=-\frac{4}{3}; \quad x_2=12.$$

Первый корень не соответствует смыслу задачи. Значит, первый самосвал может выполнить всю работу за 12 ч, а второй — за 15 ч.

1138. Пусть второй слесарь может выполнить всю работу за x ч, тогда первый слесарь может выполнить всю работу за $(x+7)$ ч, второй слесарь за 1 ч может выполнить $\frac{1}{x}$ часть работы, а первый — $\frac{1}{x+7}$ часть.

Работая вместе, они могут за 1 ч выполнить $\left(\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x}\right)$ часть работы, т. е. $\frac{2x+7}{x^2+7x}$ часть. Половину всей работы слесари могут выполнить за $\frac{1}{2}:\frac{2x+7}{x^2+7x}$ ч, т. е. за $\frac{x^2+7x}{4x+14}$ ч. Оставшуюся половину работы второй слесарь может выполнить за $\frac{x}{2}$ ч. Значит, всю работу слесари могут выполнить за $\left(\frac{x^2+7x}{4x+14}+\frac{x}{2}\right)$ ч, т. е. за $\frac{3x^2+14x}{4x+14}$ ч. Имеем уравнение

$$\frac{3x^2+14x}{2(2x+7)}-\frac{x^2+7x}{2x+7}=4{,}5;$$

$$x^2-18x-63=0; \quad x_1=-3; \quad x_2=21.$$

Первый корень не соответствует смыслу задачи. Значит, второй слесарь может выполнить всю работу за 21 ч, а первый — за 28 ч.

1139. Пусть искомое двузначное число имеет вид $\overline{ab}=10a+b$, где $a\neq 0$, тогда обращённое число равно $\overline{ba}=10b+a$. По условию задачи $(10a+b)(10b+a)=574$.

Известно, что $b=a-3$. Тогда

$$(10a+a-3)(10a-30+a)=574;$$

$$(11a-3)(11a-30)=574; \; 121a^2-363a-484=0;$$

$$a^2-3a-4=0; \;\; a_1=-1; \;\; a_2=4.$$

Первый корень не соответствует смыслу задачи, следовательно, $a=4$, $b=1$, искомое число — 41.

1140. Подставим в пропорцию $x_1 : x_2 = x_3 : x_4$ значения $x_1 = x_2 + 6$ и $x_3 = x_4 + 5$. Получим $\dfrac{x_2+6}{x_2} = \dfrac{x_4+5}{x_4}$. Отсюда $1 + \dfrac{6}{x_2} = 1 + \dfrac{5}{x_4}$; $\dfrac{6}{x_2} = \dfrac{5}{x_4}$.

Обозначим $x_4 = a$ и выразим через a все члены пропорции:

$$x_2 = 1{,}2a; \quad x_1 = 1{,}2a + 6; \quad x_3 = a + 5.$$

По условию задачи сумма квадратов всех членов пропорции равна 793. Имеем уравнение

$$(1{,}2a+6)^2 + 1{,}44a^2 + (a+5)^2 + a^2 = 793;$$
$$1{,}22a^2 + 6{,}1a - 183 = 0;$$
$$0{,}2a^2 + a - 30 = 0;$$
$$a_1 = 10; \quad a_2 = -15.$$

Задача имеет два решения: $x_1 = 18$, $x_2 = 12$, $x_3 = 15$, $x_4 = 10$ или $x_1 = -12$, $x_2 = -18$, $x_3 = -10$, $x_4 = -15$.

1141. На рисунке 17 изображены город A, точка D — место нахождения первого пешехода, $AD = 7$ км, точка E — место нахождения второго пешехода, $AE = 10$ км, точки B и C, расстояние между которыми равно 25 км.

Пусть через t ч расстояние между пешеходами станет равным 25 км. За t ч первый пешеход пройдёт путь DC, равный $4t$ км, а второй — путь BE, равный $5t$ км. По теореме Пифагора $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Следовательно,

$$(AE+BE)^2 + (AD+DC)^2 = 625;$$
$$(10+5t)^2 + (7+4t)^2 = 625;$$
$$41t^2 + 156t - 476 = 0.$$

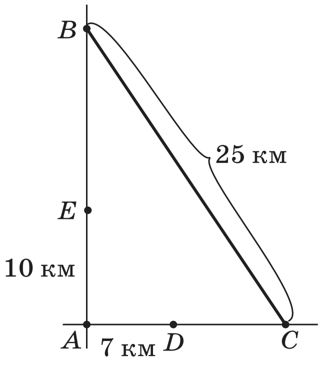


Рис. 17

Положительный корень этого уравнения равен 2. Значит, расстояние между пешеходами станет равным 25 км через 2 ч.

1142. Умножив обе части равенства $a + c = 2b$ на d, получим $(a+c) \times d = 2bd$. Но $2bd = c(b+d)$, следовательно, $(a+c)d = c(b+d)$; $ad + cd = cb + cd$. Отсюда $ad = bc$.

Разделив обе части этого равенства на $bd \neq 0$, получим $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

1143. Составим таблицу значений функции $y = -\frac{1}{\sqrt{x}}$.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9	16
y	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

При $x \to 0$ $y \to -\infty$, при $x \to +\infty$ $y \to 0$ (оставаясь отрицательным).

График функции $y = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ приведён на рисунке 18.

1144. а) $y = |x+2| + |x-2|$.
Если $x \leqslant -2$, то $y = -x - 2 - x + 2 = -2x$;
если $-2 < x \leqslant 2$, то $y = x + 2 - x + 2 = 4$;
если $x > 2$, то $y = x + 2 + x - 2 = 2x$.
Таким образом, функция задана тремя формулами

$$y = \begin{cases} -2x, \text{ если } x \leqslant -2, \\ 4, \text{ если } -2 < x \leqslant 2, \\ 2x, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

График этой функции состоит из двух лучей и отрезка прямой $y = 4$ (рис. 19).

1145. Рассмотрим сначала положительные значения x. Составим две таблицы значений функции $y = x + \frac{1}{x}$.

x	1	2	3	4
y	2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
y	2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$

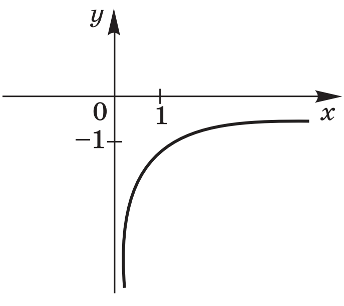


Рис. 18

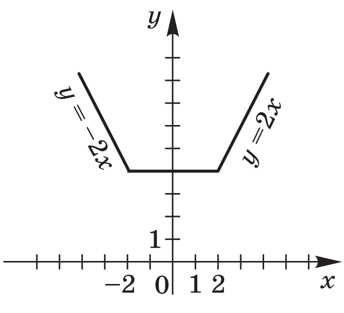


Рис. 19

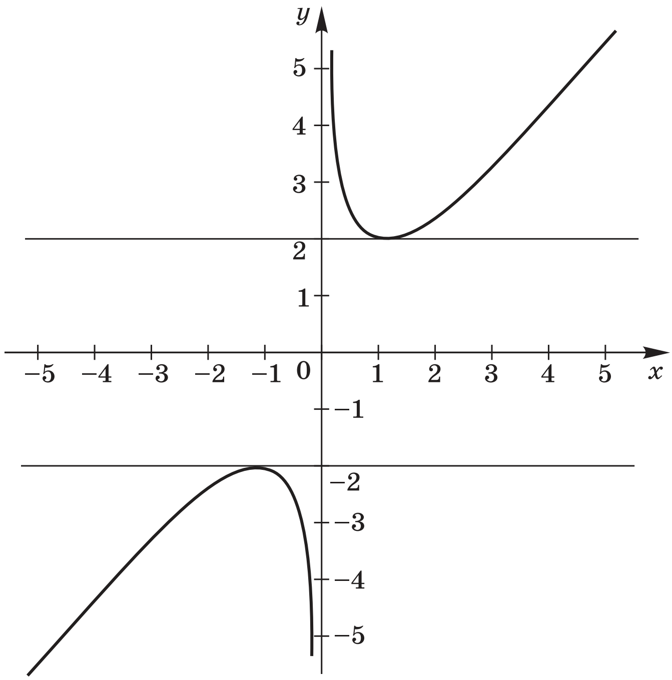


Рис. 20

Из этих таблиц видно, что точки со взаимно обратными абсциссами имеют одинаковые ординаты, т. е. точки с абсциссами 2 и $\frac{1}{2}$ имеют ординаты $2\frac{1}{2}$ и т. д.

Если $x < 0$, то мы имеем точки, симметричные точкам с положительными абсциссами относительно начала координат. Например, точке (1; 2) соответствует точка (–1; –2).

График функции изображён на рисунке 20.

1146. $\frac{3x+1}{x} = 3 + \frac{1}{x}$.

Графиком функции $y = 3 + \frac{1}{x}$ является гипербола $y = \frac{1}{x}$, сдвинутая на 3 единицы вверх.

а) Прямую $x = 0$, т. е. ось y, этот график не пересекает;

б) решив уравнение $3 + \frac{1}{x} = 0$, найдём, что $x = -\frac{1}{3}$. Следовательно, график этой функции пересекает прямую $y = 0$ в точке $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$;

в) подставив в уравнение $y = 3 + \frac{1}{x}$ значение $x = 3$, найдём значение $y = 3\frac{1}{3}$. Значит, график этой функции пересекает прямую $x = 3$ в точке $\left(3;\ 3\frac{1}{3}\right)$;

г) подставив в уравнение $y = 3 + \frac{1}{x}$ значение $y = 3$, получим $\frac{1}{x} = 0$, что невозможно. Следовательно, график функции $y = 3 + \frac{1}{x}$ не пересекает прямую $y = 3$.

1147. а) График функции $y = 2 + \frac{3}{x}$ представляет собой гиперболу $y = \frac{3}{x}$, сдвинутую на 2 единицы вверх;

б) график функции $y = \frac{4}{x} - 5$ представляет собой гиперболу $y = \frac{4}{x}$, сдвинутую на 5 единиц вниз;

в) каждой точке $(x_0;\ y_0)$ графика функции $y = \frac{12}{x}$ соответствует точка $(x_0 + 4;\ y_0)$ графика функции $y = \frac{12}{x-4}$ и наоборот. Следовательно, график функции $y = \frac{12}{x-4}$ представляет собой гиперболу $y = \frac{12}{x}$, сдвинутую на 4 единицы вправо (в направлении оси x);

г) график функции $y = -\frac{6}{x+3}$ представляет собой гиперболу $y = -\frac{6}{x}$, сдвинутую влево на 3 единицы.

1148. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$xy - 2x + 3y - 6 = x(y-2) + 3(y-2) = (y-2)(x+3).$$

Уравнение $(y-2)(x+3) = 0$ равносильно совокупности двух уравнений: $y - 2 = 0$ и $x + 3 = 0$. Значит, графиком исходного уравнения является пара пересекающихся прямых: $x = -3$ и $y = 2$.

1149. Уравнение $(y-2)(y+3) = 0$ равносильно совокупности двух уравнений: $y - 2 = 0$ и $y + 3 = 0$. Графиком его является пара параллельных прямых: $y = 2$ и $y = -3$.

1150. а) Уравнение $xy + 3x = 0$ равносильно совокупности уравнений: $x = 0$ и $y + 3 = 0$. Графиком является пара прямых: $x = 0$, т. е. ось y, и $y + 3 = 0$;

б) графиком уравнения является пара прямых: $x = y$, т. е. биссектриса I и III координатных углов, и $y - 5 = 0$;

в) графиком является гипербола $y = \frac{6}{x}$ и прямая $y = 3$;

г) $(x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0$.

Поскольку при любых значениях x и y верны неравенства $(x - y)^2 \geqslant 0$ и $(x - 1)^2 \geqslant 0$, то данное равенство возможно лишь при $x - y = 0$ и $x - 1 = 0$, т. е. $x = 1$ и $y = 1$.

Графиком уравнения является единственная точка (1; 1).

1151. Преобразуем левую и правую части равенства, выполнив подстановку:

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) = \left(1 + \frac{a - b}{a + b}\right)\left(1 + \frac{b - c}{b + c}\right)\left(1 + \frac{c - a}{c + a}\right) =$$

$$= \frac{2a \cdot 2b \cdot 2c}{(a + b)(b + c)(c + a)} = \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)};$$

$$(1 - x)(1 - y)(1 - z) = \left(1 - \frac{a - b}{a + b}\right)\left(1 - \frac{b - c}{b + c}\right)\left(1 - \frac{c - a}{c + a}\right) =$$

$$= \frac{2b \cdot 2c \cdot 2a}{(a + b)(b + c)(c + a)} = \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

Левая и правая части равны одному и тому же выражению, значит, они равны между собой.

1152. Пусть на плоскости имеется n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Тогда через одну выбранную точку можно провести $(n - 1)$ прямую, а через n точек $\frac{n(n-1)}{2}$ прямых. Имеем уравнение $\frac{n(n-1)}{2} = 45$. Корни этого уравнения: $n_1 = -9$, $n_2 = 10$.

Первый корень не соответствует смыслу задачи. Следовательно, взято 10 точек.

1153. Преобразуем дробь, стоящую под знаком радикала в левой части тождества, выделив в её числителе полный квадрат и разложив числитель на множители:

$$\frac{a^2 + 6ab + 25b^2}{a - 2\sqrt{ab} + 5b} = \frac{a^2 + 10ab + 25b^2 - 4ab}{a - 2\sqrt{ab} + 5b} = \frac{(a + 5b)^2 - 4ab}{a - 2\sqrt{ab} + 5b} =$$

$$= \frac{(a + 5b - 2\sqrt{ab})(a + 5b + 2\sqrt{ab})}{a - 2\sqrt{ab} + 5b} = a + 5b + 2\sqrt{ab}.$$

Левая часть тождества имеет вид

$$\sqrt{a + 5b + 2\sqrt{ab} - 4b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Тождество доказано.

Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Сократите дробь:

а) $\frac{64a^8b^{11}}{48a^{16}b}$; б) $\frac{25x^4}{3x^8+x^4}$; в) $\frac{25m^2-9n^2}{12n+20m}$.

2. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{a-3}{3a}+\frac{a-1}{a^2}$; б) $\frac{1}{3x-y}-\frac{1}{3x+y}$; в) $\frac{5}{a-2}-\frac{5a-1}{a^2-2a}$.

3. Найдите значение выражения $\frac{60a^2-b}{10a}-6a$ при $a=1{,}2$, $b=-18$.

---

4. Упростите выражение $\frac{3}{2a-6}-\frac{a+15}{2a^2-18}-\frac{1}{a}$.

5. Зная, что $a-b=7$, найдите значение дроби $\frac{(2a-2b)^2}{1{,}4}$.

Вариант 2

1. Сократите дробь:

а) $\frac{18a^4b^{15}}{21a^8b^5}$; б) $\frac{6p^{10}}{p^5+2p^6}$; в) $\frac{36a^2-81b^2}{18b-12a}$.

2. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{4-6p}{3p}+\frac{2p^2-1}{p^2}$; б) $\frac{3}{b+7a}-\frac{3}{7a-b}$; в) $\frac{6}{b-4}-\frac{6b+1}{b^2-4b}$.

3. Найдите значение выражения $\frac{24x^2-3y}{4x}-6x$ при $x=1{,}5$, $y=2{,}4$.

---

4. Упростите выражение $\frac{3}{2x-3}-\frac{1}{x}+\frac{2x+15}{9-4x^2}$.

5. Зная, что $x-y=5$, найдите значение дроби $\frac{(2x-2y)^2}{12{,}5}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Представьте в виде дроби выражение:

а) $\dfrac{13a^5}{p^{16}} \cdot \dfrac{p^8}{65a^{10}}$; б) $51x^7y^{11} : \dfrac{34x^9}{y}$;

в) $\dfrac{5a-15}{a+1} : \dfrac{a^2-9}{a^2-1}$; г) $\dfrac{12a-4b}{a} \cdot \left(\dfrac{a}{3a-b} + \dfrac{a}{b}\right)$.

2. Постройте график функции $y = \dfrac{4}{x}$. Какова область определения функции? При каких значениях x функция принимает положительные значения?

---

3. Докажите, что при всех допустимых значениях a значение выражения

$$\frac{2a}{4+a} + (4-a)^2 \cdot \left(\frac{3}{16-8a+a^2} + \frac{1}{16-a^2}\right)$$

не зависит от a.

4. При каких значениях b имеет смысл выражение $\dfrac{6b}{1+\dfrac{4}{3b-1}}$?

Вариант 2

1. Представьте в виде дроби выражение:

а) $\dfrac{57x^8}{y^{10}} \cdot \dfrac{y^5}{19x^{16}}$; б) $38a^{11}b^8 : \dfrac{a^{15}b^9}{2}$;

в) $\dfrac{7x-21}{x+1} : \dfrac{3-x}{x^2-1}$; г) $\dfrac{b-1}{a^2} \cdot \left(\dfrac{a}{b-1} - \dfrac{a}{b}\right)$.

2. Постройте график функции $y = -\dfrac{4}{x}$. Какова область определения функции? При каких значениях x функция принимает отрицательные значения?

---

3. Докажите, что при всех допустимых значениях a значение выражения

$$\left(\frac{2a}{a^2-1} + \frac{a-1}{2a+2}\right) \cdot \frac{2a}{a+1} + \frac{1}{1-a}$$

не зависит от a.

4. При каких значениях a имеет смысл выражение $\dfrac{5a}{1-\dfrac{4}{3a+1}}$?

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\frac{1}{3}\sqrt{225}-0{,}3\sqrt{0{,}16}$; б) $0{,}7\sqrt{\frac{25}{196}}+8{,}6$; в) $(0{,}8\sqrt{0{,}5})^2$.

2. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{169\cdot 0{,}16}$; б) $\sqrt{68}\cdot\sqrt{17}$; в) $\dfrac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{7^4\cdot 3^2}$.

3. Решите уравнение:

а) $x^2=0{,}25$; б) $x^2=47$.

---

4. Упростите выражение:

а) $\frac{3}{8}x^5\sqrt{16x^{12}}$, где $x\geqslant 0$; б) $-11a^3\sqrt{\frac{49}{a^6}}$, где $a<0$.

5. Укажите две последовательные десятичные дроби с одним знаком после запятой, между которыми заключено число $\sqrt{17}$.

6. При каких значениях p имеет смысл выражение $\dfrac{19}{\sqrt{p}-12}$?

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $0{,}5\sqrt{144}+\frac{1}{9}\sqrt{0{,}81}$; б) $7{,}6-0{,}3\sqrt{\frac{64}{225}}$; в) $(0{,}9\sqrt{7})^2$.

2. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{225\cdot 0{,}09}$; б) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{7}$; в) $\dfrac{\sqrt{243}}{\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{15^4\cdot 3^2}$.

3. Решите уравнение:

а) $x^2=0{,}81$; б) $x^2=39$.

---

4. Упростите выражение:

а) $\frac{5}{7}a^8\sqrt{49a^4}$, где $a \geqslant 0$; б) $-12p^7\sqrt{\frac{25}{p^{10}}}$, где $p < 0$.

5. Укажите две последовательные десятичные дроби с одним знаком после запятой, между которыми заключено число $\sqrt{19}$.

6. При каких значениях a имеет смысл выражение $\frac{19}{\sqrt{a}-22}$?

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Упростите выражение:

а) $7\sqrt{3}-4\sqrt{12}+\sqrt{48}$; б) $(5\sqrt{2}-\sqrt{8})\sqrt{2}$;

в) $(6-\sqrt{5})^2+12\sqrt{5}$.

2. Сравните значения выражений:

а) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$ и $5\sqrt{\frac{1}{5}}$; б) $5\sqrt{24}$ и $\frac{2}{3}\sqrt{54}$.

---

3. Сократите дробь:

а) $\frac{7+\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{14}}$; б) $\frac{81-b}{\sqrt{b}+9}$.

4. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; б) $\frac{31}{4\sqrt{2}+1}$; в) $\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$.

5. Докажите, что значение выражения $\frac{1}{7\sqrt{3}-1}-\frac{1}{1+7\sqrt{3}}$ есть число рациональное.

Вариант 2

1. Упростите выражение:

а) $17\sqrt{2}-3\sqrt{32}+\sqrt{50}$; б) $(5\sqrt{3}-\sqrt{27})\cdot\sqrt{3}$;

в) $(1-\sqrt{7})^2+2\sqrt{7}$.

2. Сравните значения выражений:

а) $\frac{1}{5}\sqrt{75}$ и $\frac{3}{8}\sqrt{48}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt{20}$ и $\frac{5}{6}\sqrt{45}$.

---

3. Сократите дробь:

а) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$; б) $\dfrac{100-a}{\sqrt{a}-10}$.

4. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{49}{5\sqrt{2}-1}$; в) $\dfrac{2}{\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}}$.

5. Докажите, что значение выражения $\dfrac{1}{5\sqrt{2}-1}-\dfrac{1}{1+5\sqrt{2}}$ есть число рациональное.

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. Решите уравнение:
а) $12x^2-5x=0$; б) $16x^2-25=0$;
в) $6x^2+5x-14=0$; г) $3x^2-2x+35=0$;
д) $81x^2-36x+4=0$.

2. Периметр прямоугольника равен 40 см, а его площадь равна 96 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

---

3. Один из корней уравнения $x^2+px-72=0$ равен 9. Найдите другой корень и коэффициент p.

4. Разность корней квадратного уравнения $x^2+x+q=0$ равна 4. Найдите q.

5. Решите относительно x уравнение $4x^2-a=0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение:
а) $6x^2-7x=0$; б) $9x^2-16=0$;
в) $6x^2-7x-5=0$; г) $5x^2-18x+28=0$;
д) $64x^2-48x+9=0$.

2. Периметр прямоугольника равен 36 см, а его площадь равна 80 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

---

3. Один из корней уравнения $x^2-7x+q=0$ равен 5. Найдите другой корень и свободный член q.

4. Разность корней квадратного уравнения $x^2+4x+q=0$ равна 8. Найдите q.

5. Решите относительно x уравнение $9x^2-b=0$.

Контрольная работа № 6

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{x-6}{4-x^2}$; б) $\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{x-2}-3=0$.

---

2. Из пункта A в пункт C, удалённый на расстояние 30 км, отправилась группа лыжников. Одновременно из пункта B в пункт C отправилась другая группа по дороге, которая была короче на 3 км. Известно, что вторая группа шла со скоростью на 2 км/ч меньшей, чем первая, и прибыла в пункт C на 12 мин позже первой. С какой скоростью шла первая группа лыжников?

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2}{x^2-9}=\dfrac{12-7x}{9-x^2}$; б) $\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x-5}+2=0$.

---

2. Из пункта A в пункт B велосипедист ехал по дороге длиной 60 км, а возвращался по другой дороге, которая на 6 км короче первой. Скорость движения на обратном пути была на 3 км/ч меньше, а время, затраченное на обратный путь, на 30 мин больше. С какой скоростью велосипедист ехал из пункта A в пункт B?

Контрольная работа № 7

Вариант 1

1. Известно, что $a<b$. Сравните значения выражений:

а) $5a$ и $5b$; б) $-3{,}7a$ и $-3{,}7b$; в) $-6\frac{2}{3}b$ и $-6\frac{2}{3}a$.

2. Зная, что $3{,}4<\sqrt{12}<3{,}5$, оцените значение выражения:

а) $5\sqrt{12}$; б) $-3\sqrt{12}$.

---

3. Оцените длину средней линии трапеции с основаниями a см и b см, если $4{,}2 \leqslant a \leqslant 4{,}6$ и $6{,}4 \leqslant b \leqslant 6{,}5$.

4. Оцените периметр и площадь прямоугольника со сторонами a см и b см, если известно, что $2{,}5 < a < 2{,}6$ и $4{,}2 < b < 4{,}3$.

5. К каждому из чисел 3, 4, 5 и 6 прибавили одно и то же число a. Сравните произведение крайних членов получившейся последовательности с произведением средних членов.

Вариант 2

1. Известно, что $x < y$. Сравните значения выражений:

а) $13x$ и $13y$; б) $-6{,}1x$ и $-6{,}1y$; в) $-5\frac{1}{3}y$ и $-5\frac{1}{3}x$.

2. Зная, что $5{,}2 < \sqrt{27} < 5{,}3$, оцените значение выражения:

а) $4\sqrt{27}$; б) $-6\sqrt{27}$.

---

3. Оцените длину средней линии трапеции с основаниями a см и b см, если $3{,}7 \leqslant a \leqslant 3{,}8$ и $7{,}2 \leqslant b \leqslant 7{,}3$.

4. Оцените периметр и площадь прямоугольника со сторонами x см и y см, если известно, что $6{,}3 < x < 6{,}4$ и $8{,}1 < y < 8{,}2$.

5. К каждому из чисел 6, 7, 8 и 9 прибавили одно и то же число a. Сравните произведение крайних членов получившейся последовательности с произведением средних членов.

Контрольная работа № 8

Вариант 1

1. Решите неравенство:

а) $\frac{1}{7}x < 5$; б) $9 - 2x \leqslant 0$;

в) $3(2y + 3{,}6) + 4y > 3y$; г) $\frac{3+y}{4} > \frac{1-3y}{3}$.

2. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5x - 10 < 0, \\ 7x - 1 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 18 - x > 16, \\ 8 - 4x > 3. \end{cases}$

---

3. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} 6x - 18 < 0, \\ 9x + 1 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 14 - 7x < 3(5 - x), \\ 1{,}5 + \dfrac{x}{3} \geqslant x. \end{cases}$

4. При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{6x - 5} + \sqrt{8 + 2x}$?

5. При каких значениях a уравнение $2x^2 + 4x - (a - 1) = 0$ имеет два различных корня?

Вариант 2

1. Решите неравенство:

а) $\dfrac{1}{3}x > 4;$ б) $19 - 3x \leqslant 0;$

в) $4(3y - 1{,}5) + 5y > 8y;$ г) $\dfrac{5 - y}{2} < \dfrac{3 + 2y}{5}.$

2. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 6x - 11 < 0, \\ 9x - 2 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 32 - 3x > 16, \\ 6 - 2x > 5. \end{cases}$

---

3. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} 16x - 48 < 0, \\ 5x + 6 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7 - 3x > 2(1 - x), \\ 1{,}5 + \dfrac{x}{4} \leqslant x. \end{cases}$

4. При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{5x - 3} + \sqrt{3 - x}$?

5. При каких значениях a уравнение $(5 - a)\, x^2 + 3x + 1 = 0$ не имеет корней?

Контрольная работа № 9

Вариант 1

1. Найдите значение выражения:

а) $6^{11} \cdot 6^{-9};$ б) $9^{-4} : 9^{-2};$ в) $(2^{-3})^2.$

2. Упростите выражение:

а) $(x^{-8})^2 \cdot x^{18};$ б) $1{,}5a^{-4}\, b^6 \cdot 4ab^{-3}.$

---

3. Преобразуйте выражение:

а) $\left(\frac{1}{9}x^{-4}y^5\right)^{-2}$; б) $\left(\frac{7a^{-1}}{3b^{-3}}\right)^{-1}\cdot 49ab^4$.

4. Вычислите: $\frac{5^{-6}\cdot 5^{-4}}{5^{-12}}$.

5. Сравните значения выражений $(3\cdot 10^{-2})\cdot(4{,}2\cdot 10^{-1})$ и $0{,}04\cdot 0{,}3$.

6. Выразите $2{,}9\cdot 10^{-5}$ км в сантиметрах.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения:

а) $5^9\cdot 5^{-7}$; б) $2^{-8}:2^{-6}$; в) $(4^{-1})^3$.

2. Упростите выражение:

а) $(a^{-6})^3\cdot a^{20}$; б) $(y^{-5})^3\cdot y^{17}$.

---

3. Преобразуйте выражение:

а) $\left(\frac{1}{6}a^{-5}b^6\right)^{-1}$; б) $\left(\frac{5x^{-1}}{3y^{-3}}\right)^{-1}\cdot(-4xy^{-4})$.

4. Вычислите: $\frac{6^{-7}\cdot 6^3}{6^{-6}}$.

5. Сравните значения выражений $(7\cdot 10^{-1})\cdot(3{,}5\cdot 10^{-2})$ и $0{,}4\cdot 0{,}06$.

6. Выразите $1{,}6\cdot 10^{-3}$ км в сантиметрах.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1. Решите неравенство $6(2x-1)-4(5x-2)>5$.

2. Упростите выражение $(\sqrt{2}+1)\sqrt{18}-0{,}4\sqrt{50}$.

3. Решите уравнение:

а) $9x^2+11x=0$; б) $3x^2+5x-2=0$.

---

4. Упростите выражение $\left(\frac{2}{4x^2-9}+\frac{1}{6x-4x^2}\right):\frac{1}{8x^2-24x}$.

5. Два велосипедиста отправились одновременно из посёлка на станцию, находящуюся на расстоянии 24 км. Скорость одного велосипедиста была на 2 км/ч больше скорости другого, и поэтому он прибыл на станцию на 10 мин раньше другого. Определите, с какой скоростью ехал каждый велосипедист.

6. При каких значениях x функция $y = \frac{14 - 3x}{5}$ принимает положительные значения?

Вариант 2

1. Решите неравенство $8(3x - 2) - 3(5x + 4) < 8$.

2. Упростите выражение $(\sqrt{24} - \sqrt{3})\sqrt{6} - \frac{2}{7}\sqrt{98}$.

3. Решите уравнение:

а) $6x^2 + 17x = 0$; б) $2x^2 + 9x - 35 = 0$.

---

4. Упростите выражение $\left(\frac{3}{9 - x^2} + \frac{1}{x - 3}\right) : \frac{x}{2x^2 + 12x + 18}$.

5. Моторная лодка прошла 36 км по течению реки и на 6 км меньше против течения. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если известно, что на путь по течению реки она затратила на 30 мин меньше, чем на путь против течения.

6. При каких значениях x функция $y = \frac{17 - 2x}{9}$ принимает отрицательные значения?

Тест для итогового зачёта[1]

Вариант 1

1. Упростите выражение $\frac{a}{ab - b^2} \cdot (a^2 - b^2)$.

Ответ: ___________

2. Чему равно значение выражения $(1{,}8 \cdot 10^{-3}) \cdot (3 \cdot 10^5)$?

А. 5400 **Б.** 540 **В.** 54 **Г.** 5,4

3. Найдите значение выражения $\frac{a^{-6} \cdot a^{-10}}{a^{-14}}$ при $a = \frac{1}{8}$.

А. 64 **Б.** –64 **В.** $\frac{1}{64}$ **Г.** $-\frac{1}{64}$

4. Какое из чисел является лучшим приближением числа $\sqrt{11}$?

А. 3,3 **Б.** 3,4 **В.** 3,5 **Г.** 3,2

---

[1] По результатам выполнения теста ставится зачёт, если верно или с небольшими погрешностями сделана половина заданий.

5. Какое из данных чисел не принадлежит области определения функции $y = \sqrt{6 - x}$?

А. -4 **Б.** 5 **В.** 6 **Г.** 7

6. Какое из двойных неравенств не является верным?

А. $4 < \sqrt{17} < 5$ **Б.** $4{,}1 < \sqrt{17} < 4{,}5$

В. $3{,}5 < \sqrt{17} < 6$ **Г.** $4{,}5 < \sqrt{17} < 5{,}5$

7. При каких значениях a имеет смысл выражение $\dfrac{1}{2 + \dfrac{2}{a - 3}}$?

А. $a \neq 3$ **Б.** $a \neq 2$ **В.** $a \neq 3$ и $a \neq 2$

Г. Таких значений нет

8. Графиком какой из указанных функций является гипербола?

А. $y = \dfrac{x}{4}$ **Б.** $y = -\dfrac{x}{4}$ **В.** $y = \dfrac{4}{x}$ **Г.** $y = x^2$

9. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \dfrac{6{,}5}{x}$?

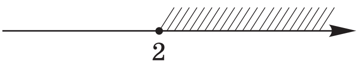
Ответ: ___________

10. Решите уравнение $15x^2 - 7x - 2 = 0$.

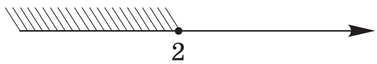
Ответ: ___________

11. На каком рисунке верно показано множество решений неравенства $(x + 2)(3x + 1) - 3(x - 1)(x + 1) \geqslant 19$?

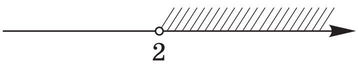
А.



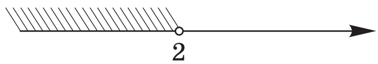
Б.



В.



Г.



12. Решите систему неравенств $\begin{cases} 12{,}5x - 2 < 1{,}5x - 1, \\ 0{,}3(1 - x) < 0{,}1x + 0{,}7. \end{cases}$

Ответ: ___________

13. Какую из статистических характеристик можно найти по таблице частот, не выполняя вычислений?

А. Среднее арифметическое **Б.** Моду

В. Медиану **Г.** Размах

14. Катер прошёл 40 км по течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Найдите скорость катера в стоячей воде, если известно, что скорость течения равна 2 км/ч.

Обозначив через x км/ч скорость катера в стоячей воде, составили уравнения. Какое из них составлено верно?

А. $\frac{40}{x} + \frac{6}{x-2} = 3$ **Б.** $\frac{40}{x+2} + \frac{6}{x} = 3$

В. $\frac{40}{x-2} + \frac{6}{x+2} = 3$ **Г.** $\frac{40}{x+2} + \frac{6}{x-2} = 3$

Вариант 2

1. Упростите выражение $\frac{x}{xy+y^2} \cdot (x^2 - y^2)$.

Ответ: ___________

2. Чему равно значение выражения $(3{,}6 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{10})$?

А. 720 **Б.** 7200 **В.** 72 **Г.** 7,2

3. Найдите значение выражения $\frac{c^{-8} \cdot c^{-11}}{c^{-17}}$ при $c = \frac{1}{9}$.

А. 9 **Б.** 81 **В.** $\frac{1}{9}$ **Г.** $\frac{1}{81}$

4. Какое из чисел является лучшим приближением числа $\sqrt{7}$?

А. 2,5 **Б.** 2,6 **В.** 2,7 **Г.** 2,4

5. Какое из данных чисел не принадлежит области определения функции $y = \sqrt{8-x}$?

А. –2 **Б.** 5 **В.** 8 **Г.** 9

6. Какое из двойных неравенств не является верным?

А. $3 < \sqrt{15} < 4$ **Б.** $3{,}5 < \sqrt{15} < 4{,}5$

В. $3{,}5 < \sqrt{15} < 5$ **Г.** $3{,}9 < \sqrt{15} < 4$

7. При каких значениях a имеет смысл выражение $\frac{2}{3 - \frac{6}{a-2}}$?

А. $a \neq 4$ **Б.** $a \neq 2$ **В.** $a \neq 4$ и $a \neq 2$

Г. Таких значений нет

8. Графиком какой из указанных функций является гипербола?

А. $y = \frac{x}{5}$ **Б.** $y = \frac{5}{x}$ **В.** $y = -\frac{x}{5}$ **Г.** $y = x^3$

9. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = -\frac{10}{x}$?

Ответ: ___________

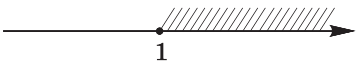
10. Решите уравнение $30x^2 + 13x - 3 = 0$.

Ответ: ___________

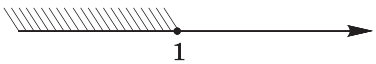
11. На каком рисунке верно показано множество решений неравенства

$$(x+4)(2x-1) - 2(x-1)(x+1) \geqslant 5?$$

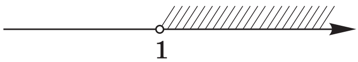
А.



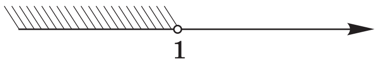
Б.



В.



Г.



12. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3{,}6 - 1{,}2x > 0{,}8x + 6, \\ -0{,}2(1 - 4x) - 0{,}5x < 0{,}1x. \end{cases}$

Ответ: ___________

13. Какую из указанных статистических характеристик можно найти по таблице частот сразу, не выполняя вычислений?

А. Среднее арифметическое **Б.** Моду

В. Медиану **Г.** Размах

14. Велосипедист проехал из посёлка на станцию, удалённую на расстояние 30 км, и через некоторое время вернулся в посёлок. На обратном пути он снизил скорость на 3 км/ч и потому затратил на обратный путь на 20 мин больше. С какой скоростью ехал велосипедист из посёлка на станцию?

Обозначив через x км/ч скорость велосипедиста на пути из посёлка на станцию, составили уравнения. Какое из них было составлено верно?

А. $\frac{30}{x} - \frac{30}{x-3} = \frac{1}{3}$ **Б.** $\frac{30}{x-3} - \frac{30}{x} = \frac{1}{3}$

В. $\frac{30}{x-3} - \frac{30}{x} = 20$ **Г.** $\frac{30}{x} - \frac{30}{x-3} = 20$

Примерное планирование учебного материала

I вариант — 3 ч в неделю, всего 102 ч
II вариант — 4 ч в неделю, всего 136 ч

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
	Глава I. Рациональные дроби	**23**	**30**
1	Рациональные дроби и их свойства	5	5
2	Сумма и разность дробей	6	8
	Контрольная работа № 1	1	1
3	Произведение и частное дробей	10	15
	Контрольная работа № 2	1	1
	Глава II. Квадратные корни	**20**	**26**
4	Действительные числа	2	3
5	Арифметический квадратный корень	6	7
6	Свойства арифметического квадратного корня	3	4
	Контрольная работа № 3	1	1
7	Применение свойств арифметического квадратного корня	7	10
	Контрольная работа № 4	1	1
	Глава III. Квадратные уравнения	**21**	**29**
8	Квадратное уравнение и его корни	10	15
	Контрольная работа № 5	1	1
9	Дробные рациональные уравнения	9	12
	Контрольная работа № 6	1	1
	Глава IV. Неравенства	**21**	**24**
10	Числовые неравенства и их свойства	8	9
	Контрольная работа № 7	1	1
11	Неравенства с одной переменной и их системы	11	13
	Контрольная работа № 8	1	1

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Глава V. Степень с целым показателем. Элементы статистики		**12**	**14**
12	Степень с целым показателем и её свойства	6	8
	Контрольная работа № 9	1	1
13	Элементы статистики	5	5
Повторение		5	13
Итоговый тест		1	1
Итоговая контрольная работа		2	2

Оглавление

Предисловие 3
Глава I. Рациональные дроби 8
§ 1. Рациональные дроби и их свойства . . . . —
§ 2. Сумма и разность дробей 14
§ 3. Произведение и частное дробей 23

Глава II. Квадратные корни 42
§ 4. Действительные числа . . . . —
§ 5. Арифметический квадратный корень 46
§ 6. Свойства арифметического квадратного корня . . . 53
§ 7. Применение свойств арифметического квадратного корня 58

Глава III. Квадратные уравнения 71
§ 8. Квадратное уравнение и его корни . . . . —
§ 9. Дробные рациональные уравнения 86

Глава IV. Неравенства 104
§ 10. Числовые неравенства и их свойства . . . . —
§ 11. Неравенства с одной переменной и их системы 119

Глава V. Степень с целым показателем. Элементы статистики 135
§ 12. Степень с целым показателем и её свойства . . . . —
§ 13. Элементы статистики 144

Задачи повышенной трудности 158

Контрольные работы 178

Примерное планирование учебного материала 191